Funzioni continue
Massimi e minimi

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Funzioni continue e loro proprietà:

Cap 5: par 1.1, 1.2, 1.3

Definizione di massimo e di massimo locale

Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x_M \in E$ si dice punto di **massimo per f in E** se

$$f(x) \leq f(x_M) \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

$x_M \in E$ si dice punto di **massimo locale** (o di massimo relativo) per f in E se
esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in E$ tale che $|x - x_M| < \delta$

$$f(x) \leq f(x_M).$$

Analogamente

Definizione di minimo e di minimo locale

Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$x_m \in E$ si dice punto di minimo per f in E se

$$f(x) \geq f(x_m) \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

$x_m \in E$ si dice punto di minimo locale (o di minimo relativo) per f in E se
esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in E$ tale che $|x - x_m| < \delta$

$$f(x) \geq f(x_m).$$

Esistenza di massimo/minimo di funzioni continue

Teorema "di Weierstrass"

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$. Allora esistono (almeno) un punto di massimo e (almeno) un punto di minimo di f in $[a, b]$.

Corollario

Sia $E \subset \mathbb{R}$ l'unione di un numero finito di intervalli chiusi e limitati. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ continua in E. Allora esistono (almeno) un punto di massimo e (almeno) un punto di minimo di f in E.

Vedi: Proposizione 1.6, pag 201 o Corollario 2.5, pag 214

Example (Necessità delle ipotesi nel Teorema di Weierstrass)

- $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_1(x) := x - 1$ per $x < 0$, $f(0) := 0$ e $f_1(x) := 1 - x$ per $0 < x$ è discontinua solo per $x = 0$ e non ha massimo e minimo;
- $f_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita da $f_2(x) := \tan(\pi x/2)$ è continua in un intervallo limitato ma non chiuso e non ha massimo e minimo.
- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_3(x) := \arctan(x)$ è continua nell'intervallo illimitato $\mathbb{R}$ e non ha in $\mathbb{R}$ né massimo né minimo.

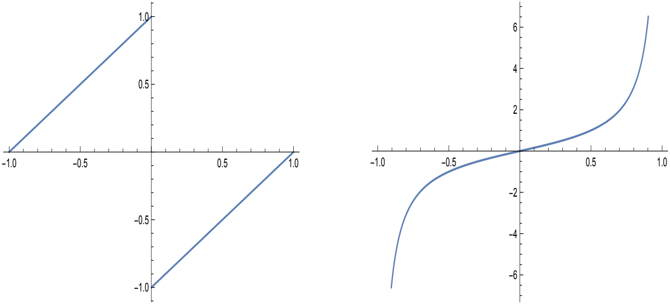

Figure: Grafici di f_1 e di f_2.

Funzioni continue e invertibilità

Teorema

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile (biunivoca). Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua.

Vedi: Teorema 2.10, pag 216

Teorema

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile (biunivoca). Allora f è strettamente monotona.

Definizione

Si dice polinomio (a coefficienti in un campo, per esempio $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) un'espressione del tipo

$$P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

dove, se $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ si dice grado del polinomio; l'indeterminata x e i coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ sono elementi del campo.

Vedi: Cap 5, par 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

Esempi di funzioni continue

Teorema: principio di identità per polinomi

Se due polinomi P e Q di grado minore o uguale a n assumono valori uguali per almeno $n+1$ valori distinti della indeterminata x allora essi coincidono.

Vedi: pag 219

Example (Funzioni razionali fratte)

Se P e Q sono polinomi (e se Q non è identicamente nullo) chiamiamo funzione razionale

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

definita per gli x tali che $Q(x) \neq 0$.
Le funzioni razionali sono continue (sul loro dominio).

Teorema

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, non identicamente nulla, tale che

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

allora esiste $b > 0$ tale che $f(x) = b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Vedi: Teorema 3.6, pag 225

Teorema

Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, non identicamente nulla, tale che

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

allora esiste $b > 0$ tale che $f(x) = \log_b x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Vedi: Teorema 3.7, pag 226

Example (Funzioni iperboliche)

- Il seno iperbolico, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

- Il coseno iperbolico, $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

- la tangente iperbolica, $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Example (Funzioni iperboliche)

- Forniscono una "parametrizzazione" dei punti dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1;$$

- valgono regole di addizione, duplicazione analoghe a quelle delle funzioni trigonometriche:

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x);$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\sinh(x);$$
$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x);$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x).$$

Example (Funzioni trigonometriche)

- Il seno, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
- Il coseno , $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
- la tangente, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

sono funzioni *periodiche*.