Derivate e differenziali

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

ottobre 2019

Derivate e differenziale: *Cap 6: par 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5*

Definizione

Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$.
f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tale limite, se esiste finito, viene chiamato *derivata di f in x_0* ed è indicato come

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vedi: Definizione 1.1, pag 242

Definizione

Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$.
f si dice derivabile in I se f è derivabile in ogni punto di I. Se f è derivabile in I la funzione

$$f' : I \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f'(x) \qquad \text{per ogni } x \in I$$

si dice funzione derivata di f.

Vedi: Definizione 1.1, pag 242

Altre notazioni

$f'(x)$

$$\frac{df}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{df}{dx}(x) \quad \text{o} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{(notazione di Leibniz)}$$

$\dot{f}(x)$ (notazione di Newton)
usata spesso se x è la variabile tempo

$Df(x)$

Example

- Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è costante, i.e. $f(x) := c_0$ per $x\in\mathbb{R}$ allora

$$f'(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x\in\mathbb{R};$$

- se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una potenza con esponente intero, i.e. $f(x) := x^n$ per $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq 1$ allora

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \text{per ogni } x\in\mathbb{R};$$

infatti

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \text{potenze di } h \text{ di grado} > 2}{h}$$
$$= nx^{n-1}$$

Example

Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una potenza con esponente reale positivo, i.e. $f(x) := x^\alpha$ per $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > 0$ allora

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad \text{per } x > 0;$$

infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} &= \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{(1 + h/x)^\alpha - 1}{h} \\
&= x^{\alpha-1} \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h/x)^\alpha - 1}{h/x} \\
&= x^{\alpha-1} \lim_{y \to 0} \frac{(1 + y)^\alpha - 1}{y} \\
&= \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Example

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'esponenziale $f(x) := e^x$ allora

$$f'(x) = e^x \qquad \text{per } x \in \mathbb{R};$$

infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x;$$

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è $f(x) := a^x$, per $a > 0$, allora

$$f'(x) = a^x \log a, \qquad \text{per } x \in \mathbb{R};$$

infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \log a \lim_{h\to 0} \frac{e^{h\log a} - 1}{h \log a} = a^x \log a.$$

Teorema

Se f è derivabile in $x_0 \in I$ allora f è continua in x_0.

Prova: Dobbiamo provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Questo segue da

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h \\ &= f'(x_0) \lim_{h \to 0} h = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Vedi: Proposizione 1.1, pag 244

Example (Esistono funzioni continue ma non derivabili)

La funzione *valore assoluto*

$$x \mapsto |x| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$.

Vedi: Esempio 1.5, pag 244

Definizione

Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$.

- Se esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

  allora f si dice differenziabile in x_0.

- La funzione

$$df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h \mapsto df_{x_0}(h) := Ah$$

  si dice differenziale di f in x_0.

Vedi: Definizione 1.2, pag 257

Equivalenza fra derivabilità e differenziabilità.

f è differenziabile in x_0 se e solo se f è derivabile nel punto x_0. Inoltre $A = f'(x_0)$.

Traccia di dimostrazione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

è equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A = 0$$

che è equivalente a

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{esiste e} \quad f'(x_0) = A.$$

Osservazione

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$ allora definiamo

retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

la retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

o, equivalentemente, il grafico della funzione

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Definizione

Derivata destra, sinistra. Punto angoloso in un grafico.

Definizione

Punto a tangente verticale, cuspide.

Vedi: pag.244 e pag.245.

Definizione

- Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile, se $f' : I \to \mathbb{R}$ è a sua volta derivabile in $x_0 \in I$, la derivata di f' in x_0 si chiama derivata seconda di f e si denota $f''(x_0)$.
- Analogamente si definiscono le derivate terze, quarte etc.

Notazioni per derivate di ordine superiore

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \ddot{f}(x) = D^{(2)} f(x) \\
f'''(x) = f^{(3)}(x) &= \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \dots = D^{(3)} f(x) \\
f^{(4)}(x) &= \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = D^{(4)} f(x) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n f(x)}{dx^n} = D^{(n)} f(x)
\end{aligned}
$$

Example

Se $f(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, allora per $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2}, \qquad \text{se } n \geq 2 \\
f^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \qquad \text{se } n \geq 3 \\
&\vdots \\
f^{(h)}(x) &= n(n-1)\dots(n-h+1)x^{n-h} \qquad \text{se } h \leq n \\
f^{(n)}(x) &= n! \\
f^{(n+1)}(x) &= f^{(n+2)}(x) = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Example

Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è $f(x) := x^\alpha$ per $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha > 0$ allora

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\ &\vdots \\ f^{(h)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-h+1)x^{\alpha-h} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vedi: Esempi, 1.6, 1.7,18, 1.9 a pag 246

Example (Derivata di funzioni trigonometriche)

$$D\sin(x) = \cos(x); \qquad D\cos(x) = -\sin(x).$$

inoltre

$$D^{(2)}\sin(x) = -\sin(x); \qquad D^{(3)}\sin(x) = -\cos(x).$$

quindi

$$\sin(x) = D^{(4)}\sin(x) = D^{(8)}\sin(x) = \dots$$

$$\cos(x) = D^{(4)}\cos(x) = D^{(8)}\cos(x) = \dots$$

Vedi: Esempi, 1.6, 1.7,18, 1.9 a pag 246

Teorema: Derivata di somma, prodotto e quoziente

Se f e g sono derivabili in x_0 allora

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0)\\(f+g)'(x_0) &= f'(x_0)+g'(x_0)\\(fg)'(x_0) &= f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0).\end{aligned}$$

Inoltre, se $g(x_0) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Vedi: Teorema 1.2, pag 248.

Osservazione

L'insieme $\mathcal{C}^1(I)$ delle funzioni derivabili con derivata continua su un intervallo I è uno spazio vettoriale.
La derivazione D

$$D : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I)$$
$$f \in \mathcal{C}^1(I) \mapsto Df \in \mathcal{C}^0(I)$$

è una funzione lineare fra i due spazi vettoriali $\mathcal{C}^1(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$.

Teorema. (Regola della catena)

Se f è derivabile in x_0 e se g è derivabile in $f(x_0)$ allora

- la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e
- $$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Vedi: Teorema 1.3, pag 251

Teorema. (Derivazione della funzione inversa)

Se f è invertibile in un intorno di x_0, se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) \neq 0$ allora

- la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ e
- $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Vedi: Teorema 1.4, pag 254