Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019

Cap 6: par 2.1, 2.2, 2.3

Definizione

x_0 si dice estremo locale di $f : E \to \mathbb{R}$ se x_0 è un punto di massimo o minimo locale di f in E.

Definizione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$. $x_0 \in I$ si dice punto critico (o punto stazionario) di f in I se

$$f'(x_0) = 0.$$

Vedi: Definizione 2.1, pag 261.

Teorema (conosciuto come Teorema di Fermat)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$.

Se

1. $x_0 \in I$ è un estremo locale di f in I,
2. se x_0 è un *punto interno di* I,
3. se f è derivabile in x_0

allora

$$f'(x_0) = 0.$$

Vedi: Teorema 2.1 e dimostrazione a pag 260.

Teorema di Fermat e ricerca degli estremi locali di una funzione.

Teorema

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ sia un estremo locale di f in I.
Allora almeno una delle seguenti possibilità è vera

- x_0 è un punto di frontiera di I
- $f'(x_0) = 0$
- f non è derivabile in x_0

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Se

1. f è continua in $[a, b]$,
2. f è derivabile in (a, b),
3. $f(a) = f(b)$

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = 0.$$

Vedi: Teorema 2.2 e dimostrazione a pag 262

Traccia di dimostrazione:

1. Se f è costante in $[a, b]$ allora la derivata è nulla in ogni punto.
2. Se f non è costante allora $\max_{[a,b]} f(x)$ e $\min_{[a,b]} f(x)$,
   - esistono per il teorema di Weierstrass,
   - sono diversi fra loro

   Poichè $f(a) = f(b)$, non possono essere raggiunti entrambi agli estremi di $[a, b]$. Quindi almeno uno dei due si trova in (a, b) e, per il Teorema di Fermat, è un punto stazionario.

$\square$

Teorema del valor medio o di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Se

1. f è continua in $[a, b]$,
2. f è derivabile in (a, b),

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$(b - a)f'(c) = f(b) - f(a).$$

Vedi: Teorema 2.4 e dimostrazione a pag 263

Traccia di dimostrazione:
Si definisce $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ come

$$w(x) := f(x)(b-a) - (f(b) - f(a))(x-a).$$

w verifica le ipotesi del Teorema di Rolle.
Quindi esiste $c \in (a, b)$ tale che $w'(c) = 0$, cioè

$$w'(c) = f'(c)(b-a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

$\square$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Relazioni fra monotonia di f e segno della derivata f'.

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e f è derivabile in I.

- se $f'(x) \geq 0$ in I allora f è crescente (i.e. non decrescente) in I;
- se $f'(x) > 0$ in I allora f è strettamente crescente in I.

Traccia di dimostrazione:
Siano $x_1 < x_2$ punti arbitrari di I.
f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$.
Quindi esiste $c = c(x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

$\square$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Derivate di ordine superiore e studio dei punti stazionari.

Teorema

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f derivabile n volte in (a, b) e $f^{(n)}$ continua in (a, b).

Se in $x_0 \in (a, b)$

- $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
- $f^n(x_0) \neq 0$

allora

se n è pari: x_0 è un punto di massimo/minimo locale di f:
se $f^n(x_0) < 0$: x_0 è massimo locale,
se $f^n(x_0) > 0$: x_0 è minimo locale;

se n è dispari: x_0 è un punto di flesso.

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e f e due volte derivabile in I.

Se $f''(x) \geq 0$ in I allora f è convessa in I

Se $f''(x) \leq 0$ in I allora f è concava in I.

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema

Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti

1. $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$,
2. f è costante in I.

Definizione

Siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $G : E \to \mathbb{R}$.

Se

- G è derivabile in ogni punto di E,
- $G'(x) = f(x)$ in ogni punto di E.

allora G si dice primitiva o antiderivata di f in E

Vedi: Definizione 2.2 pag.265

Corollario

Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$.
Se $F : I \to \mathbb{R}$ e $G : I \to \mathbb{R}$ sono antiderivate di f in I allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) - G(x) = c \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Teorema: caratterizzazione delle funzioni esponenziali

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se

1. f è derivabile in $\mathbb{R}$,
2. $f(0) = 1$,
3. esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$f'(x) = kf(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

allora

$$f(x) = e^{kx}.$$

Vedi: Teorema 2.5, pag. 267