Teoremi di de l'Hospital
Polinomi di Taylor

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019

Vedi: Cap 6: par 2.4, 2.5

Teorema di de l'Hôpital (1)

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ e f, g derivabili in (a, b).

Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{per } x \in (a, b)$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

Vedi: Teorema 2.6 pag. 269

Teorema di de l'Hôpital (2)

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ e f, g derivabili in (a, b).

Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty \quad (\text{oppure } -\infty)$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{per } x \in (a, b)$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

Valgono analoghe versioni quando $x \to -\infty$ oppure per $x \to b^-$ o per $x \to +\infty$.

Teorema di de l'Hôpital (3)

Siano $f, g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ e f, g derivabili in $(-\infty, b)$.

Se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \quad (\text{oppure } +\infty \text{ oppure } -\infty)$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, b)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

allora

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

La dimostrazione del Teorema di de l'Hôpital si basa sulla seguente generalizzazione del Teorema di Lagrange.

Teorema (di Cauchy)

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Se

- f e g sono continue in $[a, b]$,
- f e g sono derivabili in (a, b),

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Definizione

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dicono avere

un contatto di ordine n in $x_0 \in (a, b)$

- se f e g sono n volte derivabili in x_0
- e se

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \quad \dots \quad , f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

Vedi: Definizione 2.3, pag. 275

Proposizione

Se $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ hanno un contatto di ordine n in $x_0 \in (a, b)$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$\square$

Una utile notazione

Se

$$\lim_{x \to x_0(\pm\infty)} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$$

diciamo che

f è infinitesimo rispetto a h per $x \to x_0(\pm\infty)$

o, con una notazione comune,

$$f(x) = o(h(x)) \qquad \text{per } x \to x_0(\pm\infty)$$

che si legge

f è o-piccolo di h per $x \to x_0(\pm\infty)$.

Una utile notazione

Se $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ hanno un contatto di ordine n in $x_0 \in (a, b)$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

e diciamo che $f - g$ è infinitesimo rispetto a $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0(\pm\infty)$
oppure

$$f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0(\pm\infty)$$

oppure

$$f(x) = g(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0(\pm\infty)$$

Proposizione e Definizione

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora esiste un unico polinomio, T_{n,x_0}, di grado $\leq n$ che ha con f un contatto di ordine n in x_0.
T_{n,x_0} si dice polinomio di Taylor di ordine n di f con centro in x_0 (oppure polinomio di MacLaurin se $x_0 = 0$)

$$T_{n,x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k.$$

Vedi: Proposizione 2.8, pag. 276

Example (Polinomi di MacLaurin di $f(x) := e^x$)

$$T_1(x) := 1 + x$$

$$T_2(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$\dots$$

$$T_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Vedi: Esempi 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, pag 276–279

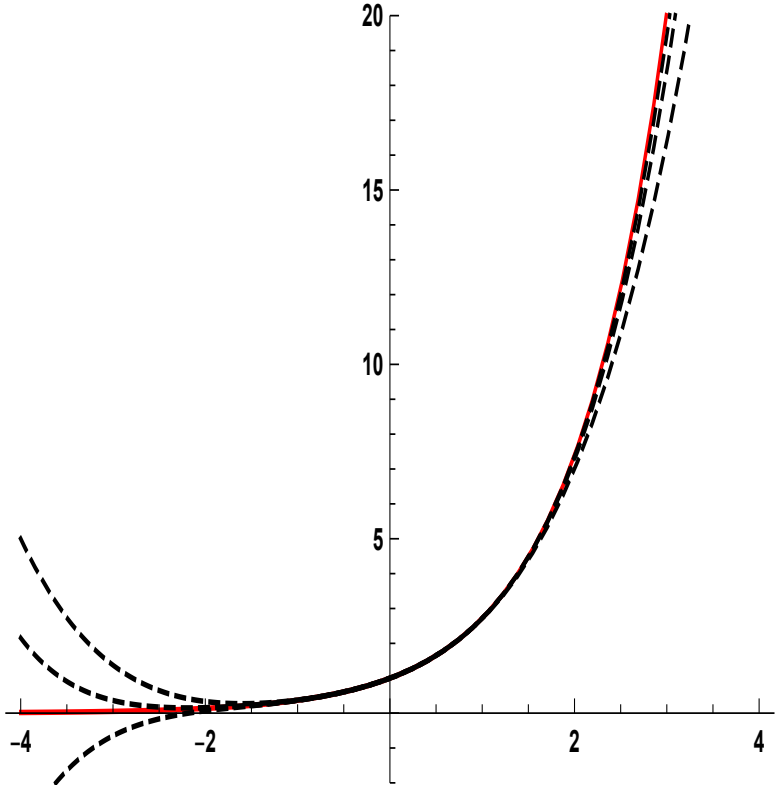

Figure: Grafici di e^x e dei polinomi di MacLaurin di grado 4, 5, 6

Example (Polinomi di MacLaurin di $f(x) := \sin(x)$)

$$T_1(x) := x$$
$$T_2(x) := x$$
$$T_3(x) = T_4(x) := x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = T_6(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$
$$\dots$$
$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

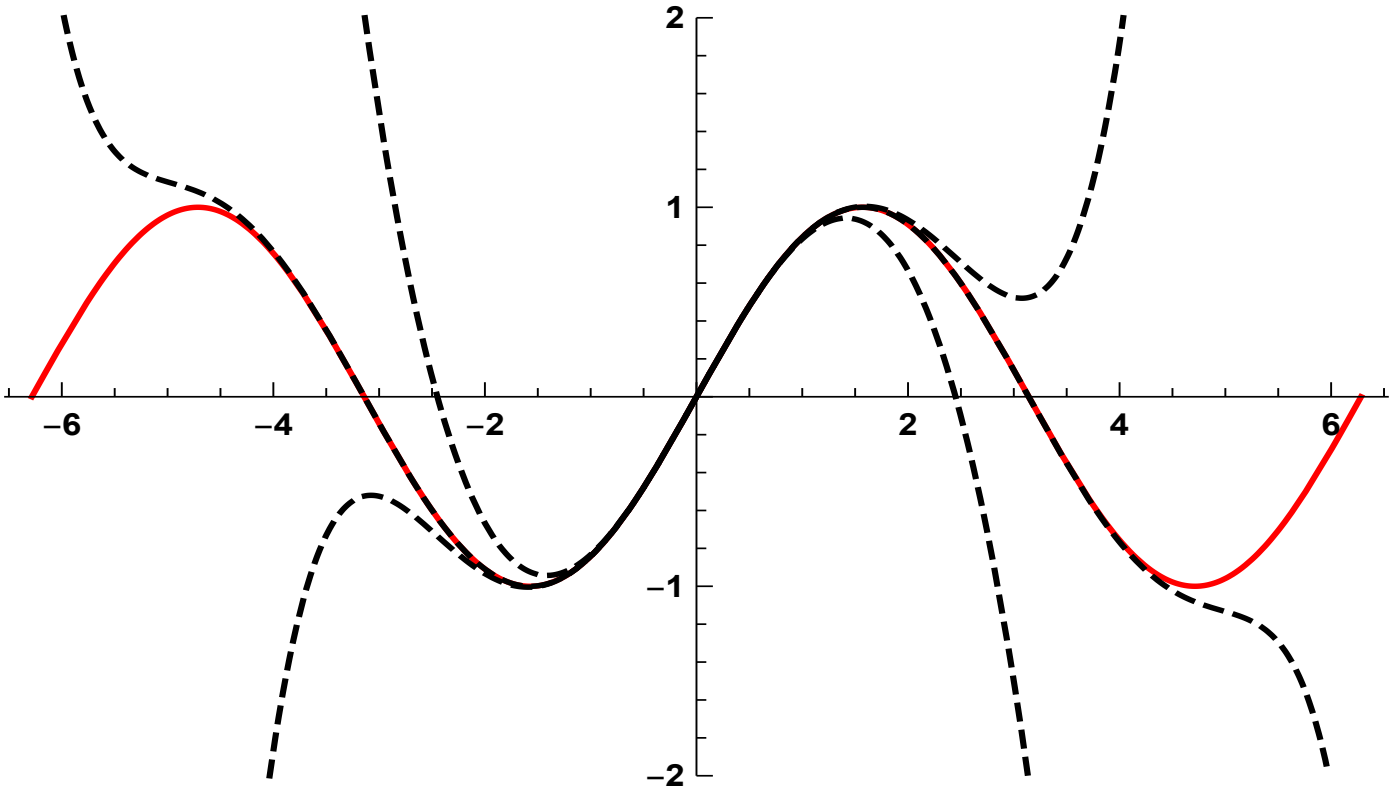

Figure: Grafici di $\sin(x)$ e dei polinomi di MacLaurin di grado 3, 5, 11

Example (Polinomi di MacLaurin di $f(x) := \cos(x)$)

$$T_0 = T_1(x) := 1$$

$$T_2(x) = T_3(x) := 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$T_4(x) = T_5(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\dots$$

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

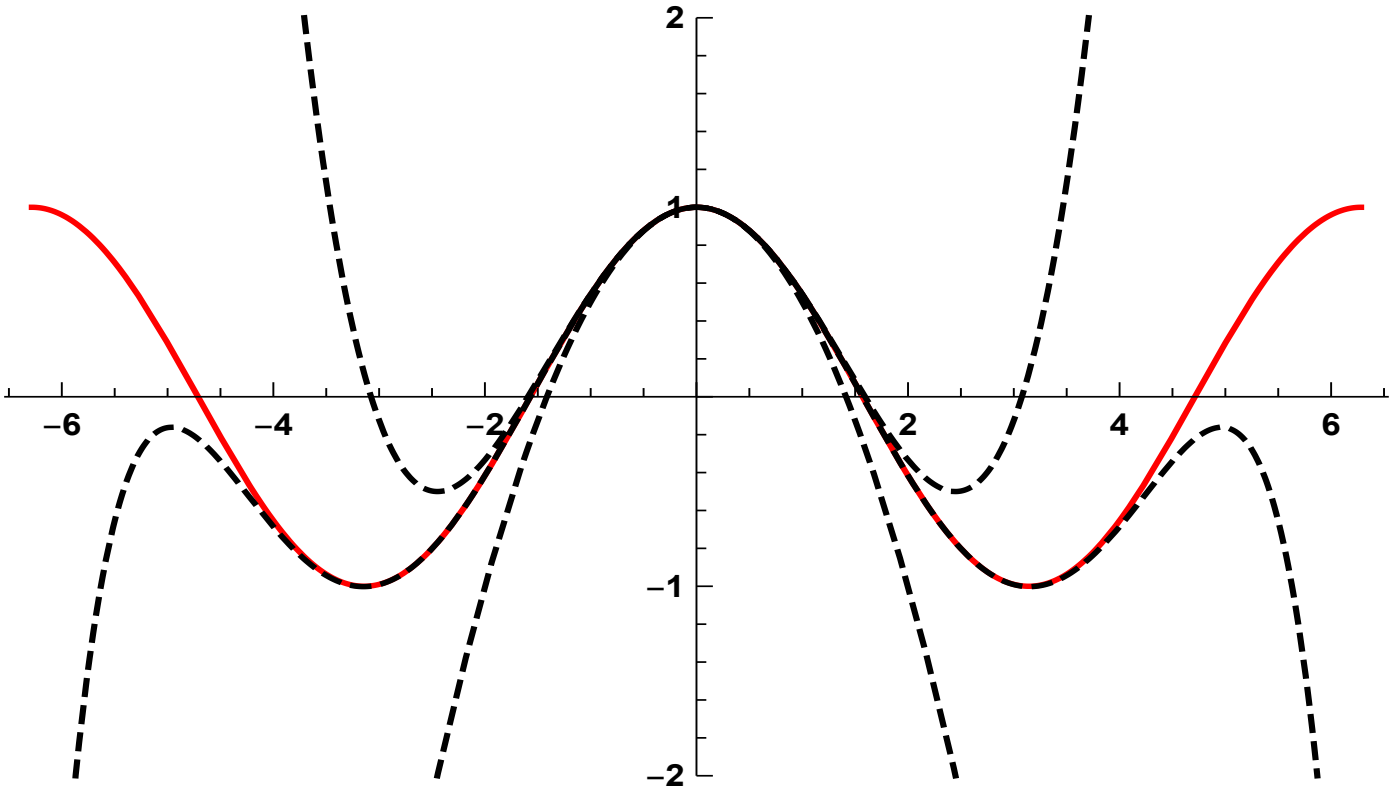

Figure: Grafici di $\cos(x)$ e dei polinomi di MacLaurin di grado 4, 6, 10

Example (Polinomi di MacLaurin di $\sinh(x)$ e di $\cosh(x)$.)

$$\sinh(x): \quad T_{2n+1}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh(x): \quad T_{2n}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Example (Polinomi di MacLaurin di $\arctan(x)$)

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Example (Polinomi di MacLaurin di $\log(1+x)$.)

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

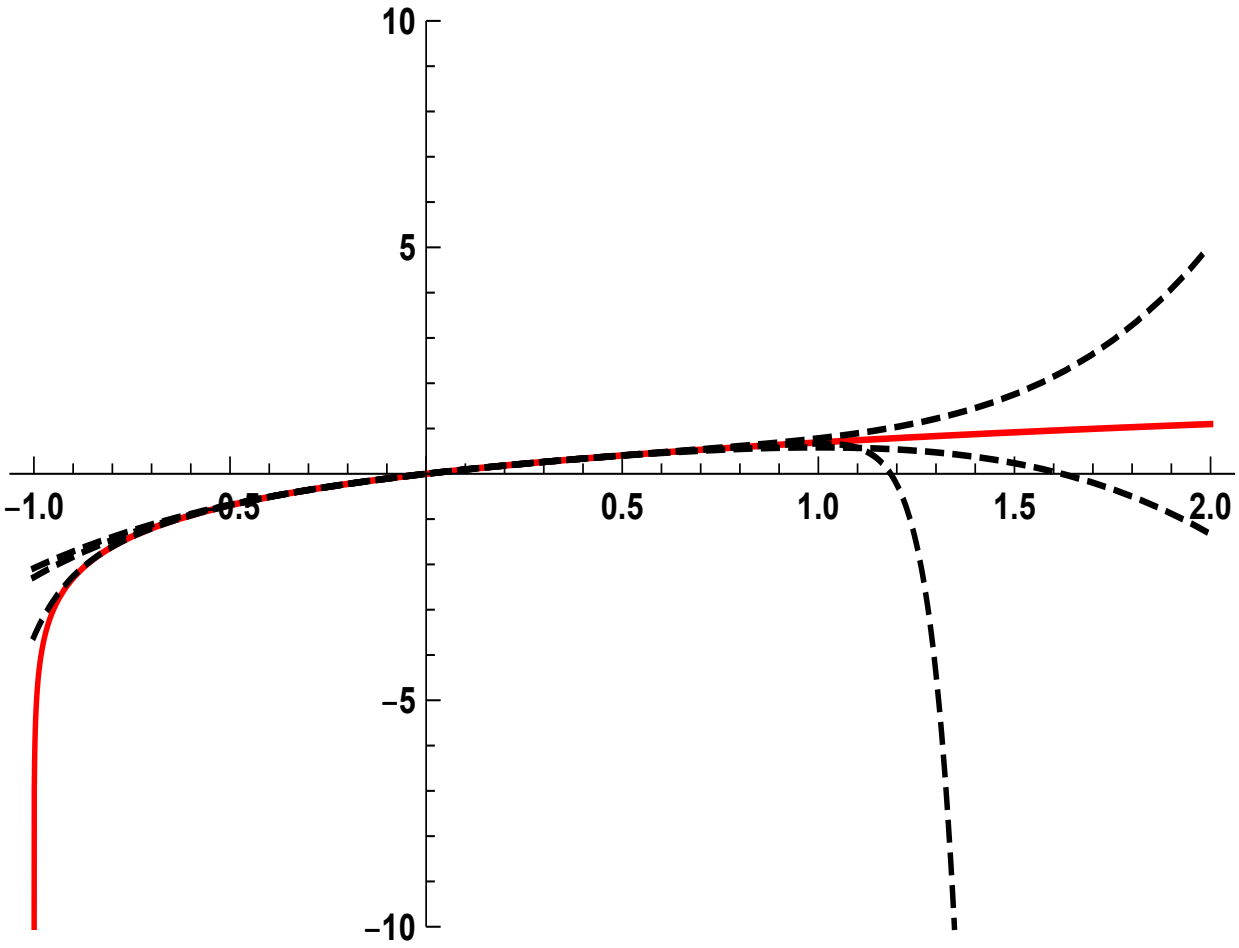

Figure: Grafici di $\log(1+x)$ e di alcuni polinomi di MacLaurin.

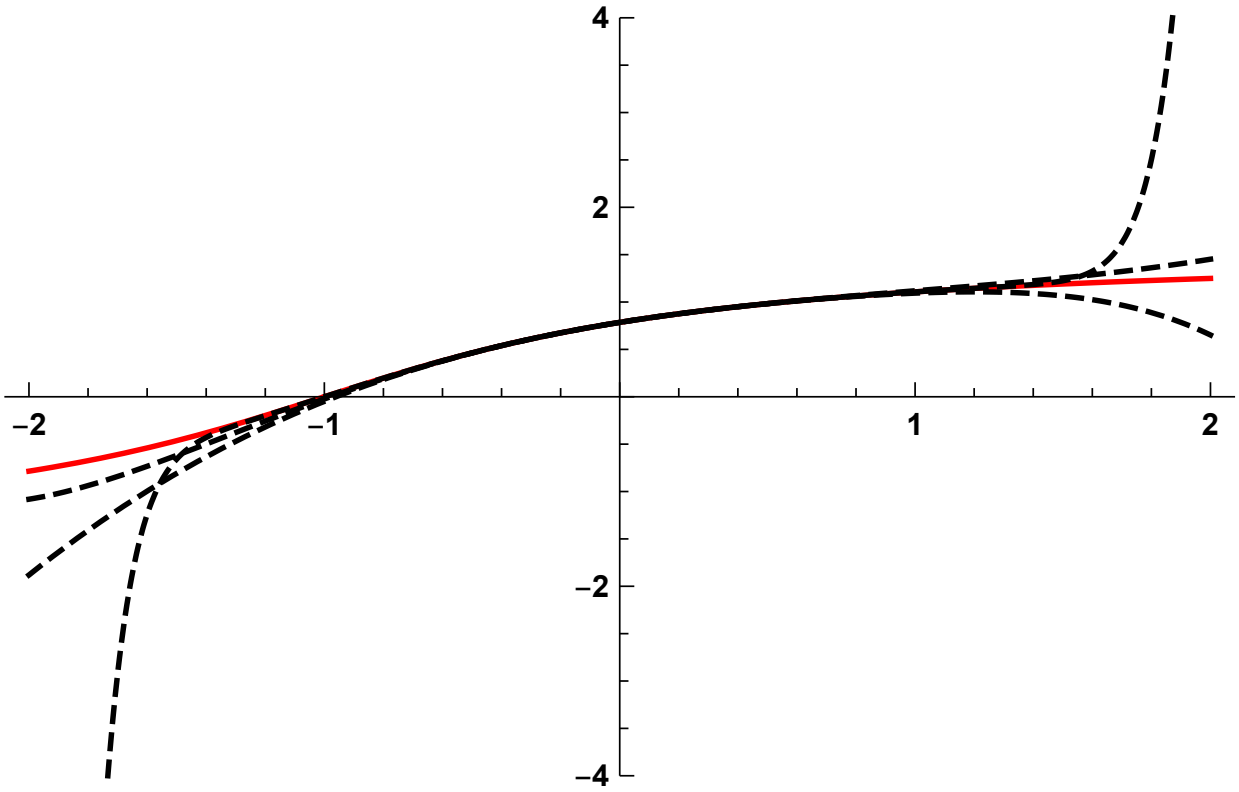

Figure: Grafici di $\arctan(x)$ e di alcuni polinomi di MacLaurin.

Example

$$\frac{1}{1-x}: \quad T_n(x) := 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\frac{1}{1+x}: \quad T_n(x) := 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

La seguente formula estende le due precedenti

Example (Polinomi di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$)

$$T_n(x) := 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

dove, per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

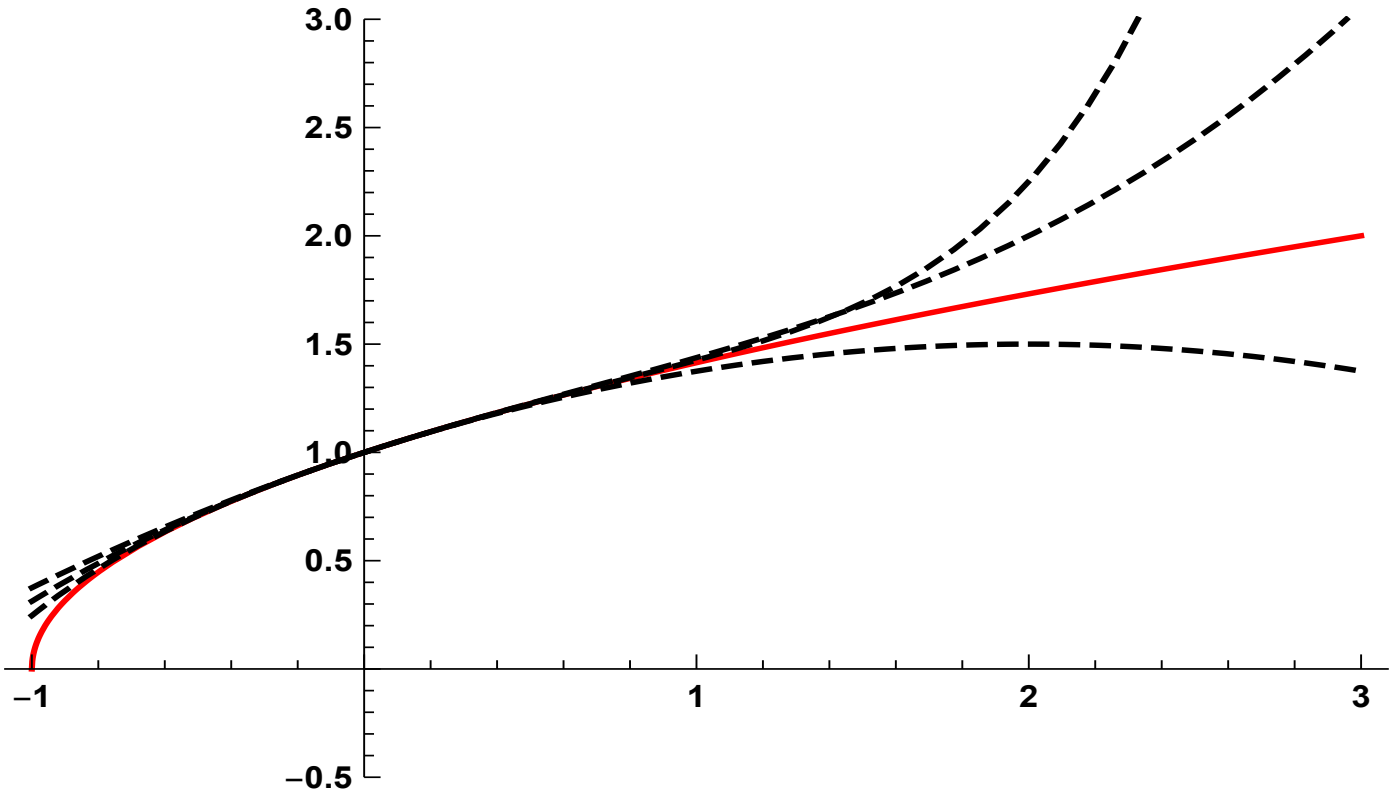

Figure: Grafici di $\sqrt{1+x}$ e dei polinomi di MacLaurin di grado 2, 3, 5

$$T_2(x) := 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \qquad T_5(x) := 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256}$$