La formula di Taylor

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019

La formula di Taylor. *Cap 6. par. 2.5*

MEMO

Definizione

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$.

Se

- f e g sono n volte derivabili in x_0
- e se

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \quad \ldots \quad , f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

allora si dice che f e g hanno un contatto di ordine n in x_0.

Vedi: Definizione 2.3, pag. 275

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e f sia n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$.

Si dice polinomio di Taylor di ordine n di f con centro in x_0 il polinomio T_{n,x_0}:

$$
\begin{aligned}
T_{n,x_0}(x) :=\; & f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots \\
& \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n = \\
& = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k .
\end{aligned}
$$

T_{n,x_0} ha un contatto di ordine n con f in x_0.
T_{n,x_0} è l'unico polinomio di grado $\leq n$ con questa proprietà.

Formula di Taylor

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia f n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$.

Diciamo Formula di Taylor l'espressione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + E_{n,x_0}(x)$$

dove l'errore $E_{n,x_0}(x)$ è, ovviamente,

$$E_{n,x_0}(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) - T_{n,x_0}(x).$$

Vedi: Definizione 2.4 e Teorema 2.10, pag. 280

MEMO

Proposizione

Se $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ hanno un contatto di ordine n in $x_0 \in (a,b)$ allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Osservazione: in notazione di "o"

Se $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ hanno un contatto di ordine n in $x_0 \in (a,b)$ allora

$$f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n), \qquad \text{per } x \to x_0$$

oppure

$$f(x) = g(x) + o((x - x_0)^n), \qquad \text{per } x \to x_0$$

Teorema: stima del resto secondo Peano

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia f n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$.

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k / k!}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Una utile notazione

Se

$$\lim_{x \to x_0(\pm\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

diciamo che

f è infinitesimo rispetto a g per $x \to x_0(\pm\infty)$

o, con una notazione comune,

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{per } x \to x_0(\pm\infty)$$

che si legge

f è o-piccolo di g per $x \to x_0(\pm\infty)$.

Utilizzando la notazione "o-piccolo", la stima di Peano dell'errore è

$$E_{n,x_0}(x) = o((x - x_0)^n) \qquad \text{per} \quad x \to x_0.$$

La Formula di Taylor diventa

Teorema: Formula di Taylor con resto secondo Peano

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia f n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$.

Allora

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Example (Formule di Taylor con resto di Peano per $f(x) := e^x$ (1))

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0 \qquad e^x = 1 + x + o(x), \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + x^2/2!)}{x^2} = 0$$

che si scrive anche

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + o(x^2), \qquad \text{per } x \to 0$$

Vedi: Esempi 2.16 e 2.18, pag. 282, 283

Example (Formule di Taylor con resto di Peano per $f(x) := e^x$ (2))

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - T_n(x)}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})}{x^n} = 0$$

si scrive anche come

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \qquad \text{per } x \to 0$$

Example (Formule di Taylor con resto di Peano per $\sin(x)$ (1))

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - T_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = 0$$

o equivalentemente:

$$\sin(x) = x + o(x), \qquad \text{per } x \to 0$$

Example (Formule di Taylor con resto di Peano per $\sin(x)$ (2))

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-T_3(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+x^3/6}{x^3}=0$$

o equivalentemente:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\qquad \text{per } x\to 0$$

Example (Formule di Taylor con resto di Peano per $\sin(x)$ (3))

In generale, per $n \geq 1$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - T_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \left(x - x^3/6 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!\right)}{x^{2n+1}} = 0$$

o equivalentemente:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Example (Altre Formule di Taylor con resto di Peano)

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1});$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

Example (Altre Formule di Taylor con resto di Peano)

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + o(x^n);$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n);$$

Teorema: Stima del resto secondo Lagrange

Sia $f \in \mathcal{C}^n(a,b)$ e f sia $(n+1)$ volte derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$

allora

per ogni $x \in (a,b)$ esiste $c = c(x, x_0, n)$, compreso tra x e x_0, t.c.

$$E_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

La Formula di Taylor prende la forma:

Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

Sia $f \in \mathcal{C}^n(a,b)$ e f sia $(n+1)$ volte derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$

allora

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Example (Formule di Taylor con resto di Lagrange)

$$e^x = 1 + x + \frac{e^c}{2}x^2,$$

per un $c = c(x)$ opportuno, compreso fra 0 e x

$$\vdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

per un $c = c(x, n)$ opportuno, compreso fra 0 e x

Example (Formule di Taylor con resto di Lagrange)

$$\sin(x) = x + \frac{\cos c}{3!}x^3,$$

per un opportuno $c = c(3, x)$,

ricordando che $D^{(3)} \sin x = -\cos x$

$$\vdots$$

$$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + \frac{\cos c}{7!}x^7,$$

per un opportuno $c = c(7, x)$,

ricordando che $D^{(7)} \sin x = -\cos x$.

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Corollario della F. d T. con resto di Lagrange

Per ogni (fissato) $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Example

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}, \qquad \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

(Traccia di prova):

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^{c(x,n)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

e, poiché $c(x, n)$ è compreso fra 0 e x,

$$\left| \frac{e^{c(x,n)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq C(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

e, per definizione di somma di una serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Il polinomio di Taylor T_{n,x_0} è l'unico polinomio di grado $\leq n$ per cui vale la Formula di Taylor con resto di Peano.

Proposizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e f sia n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$.

Se esiste un polinomio P_{n,x_0}, di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0$$

allora

$$P_{n,x_0}(x) = T_{n,x_0}(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Vedi: Proposizione 2.11, pag. 282

Example (Esempio 2.17 pag. 282)

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\arctan(2x) = 2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1 + 4x^2) = 4x^2 - 8x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$