Ancora sulla formula di Taylor

Raul Paolo Serapioni

Analisi Matematica 1
Analisi Matematica A – Primo modulo
Corsi di Laurea in Fisica e Matematica
Università di Trento

novembre 2019

MEMO

Per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Per ogni $y \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2N} \frac{(iy)^k}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad i \quad \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{2N} \frac{(iy)^k}{k!} = \cos y \quad + \quad i \ \sin y.$$

Definizione

Per ogni $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \cos y + i \ \sin y.$$

Per ogni $z := x + iy \in \mathbb{C}$

$$e^{x+iy} := e^x \left(\cos y + i \ \sin y\right).$$

Irrazionalità di e

Proposizione

Il numero e è irrazionale.

Traccia di prova: Per assurdo. Per ogni $N \in \mathbb{N}$

$$0 < e - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(N+1)!}$$

$$0 < e\, N! - N! \left(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{N!}\right) < \frac{e}{N+1} < \frac{3}{N+1}$$

Se $e = \frac{p}{q}$ fosse razionale, per N grande, si avrebbe che

$$0 < \left(\frac{p}{q}\, N! - N! \left(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{N!}\right)\right) \in \mathbb{N} < 1$$

Definizione

Sia I un intervallo. $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa in I se vale una delle due proprietà fra loro equivalenti:

1. l'epigrafico di f è un insieme convesso;
2. per ogni x_1 e $x_2 \in I$, il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non sta mai "sotto" il grafico di f:

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1),$$

   per ogni $\lambda \in [0,1]$.

$f : I \to \mathbb{R}$ si dice concava in I se $-f$ è convessa in I.

Vedi Definizioni 3.1 e 3.1', pag. 286

Proposizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e f convessa in (a, b). Allora

1. f è continua in (a, b);
2. per ogni $x_0 \in (a, b)$ esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$.

Vedi Teorema 3.1 pag 288

Le funzioni convesse non sono necessariamente derivabili.
Le funzioni convesse e derivabili possono essere caratterizzate nel seguente modo:

Proposizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

1. Se f è derivabile in (a, b) allora:

$$f \text{ è convessa se e solo se } f' \text{ è crescente;}$$

2. se f è due volte derivabile in (a, b) allora:

$$f \text{ è convessa se e solo se } f'' \geq 0.$$

Vedi Teorema 3.3 pag 290

Proposizione

Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è n volte derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^n(x_0) \neq 0$$

allora:

se n è pari x_0 è un punto di massimo/minimo locale di f
se n è dispari x_0 è un punto di flesso.

Vedi Teorema 3.5 pag. 293

Osservazione

Non si assume né che $f^{(n)}$ sia continua in x_0 né che esista fuori da x_0.

Calcolo di ordini di infinito e infinitesimo

Example

Calcolate, in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arctan x)^2 - \log(1 + x^2)}{x^\alpha}$$

Calcolo approssimato del valore di una funzione

Example

Calcolate $\sqrt{e}$ con la precisione di 5 cifre decimali.

Vedi Esempi 3.7, 3.8, 3.9. pag 297