ANALISI MATEMATICA A – SECONDO MODULO
SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DELLA SETTIMANA 15

(1) *(Es 9 pag 117)* Se per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

verificate che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente *legge del parallelogramma*:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Interpretate geometricamente il significato dell'uguaglianza nel caso $n = 2$.

Soluzione

Iniziamo verificando la *legge del parallelogramma*:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \cancel{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} + \cancel{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \cancel{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} - \cancel{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2
\end{aligned}$$

Rappresentiamo graficamente i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^2$

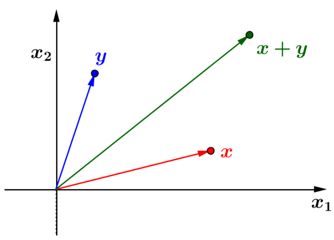

FIGURE 1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}$

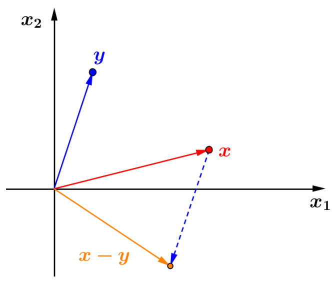

FIGURE 2. $\mathbf{x}-\mathbf{y}$

e il parallelogramma

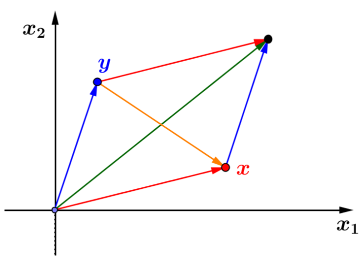

FIGURE 3. Parallelogramma

Perciò l'uguaglianza esprime il teorema "la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui quattro lati"

(2) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiamo le seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

(1) dimostrate che queste funzioni sono delle *norme*;
(2) mostrate, con esempi, che l'identità del parallelogramma non vale per le due norme precedenti. Cioè trovate almeno una coppia di punti per cui l'uguaglianza sia falsa;
(3) dimostrate che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ valgono le due disuguaglianze

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$$
$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|$$

(4) disegnate, per $n = 2$ i sottoinsiemi del piano

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\right\}, \qquad \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\right\}$$

Soluzione

(a) Vogliamo dimostrare che $\|\mathbf{x}\|_1$ e $\|\mathbf{x}\|_\infty$ sono norme, cioé vogliamo dimostrare che per entrambe vale:

(1)
$$\|\mathbf{x}\| \geq 0, \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

(2)
$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(3)
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Per $\|\mathbf{x}\|_1$ abbiamo:

(1) La positività della norma e l'implicazione $\|\mathbf{x}\|_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$ sono immediate dalla definizione.

(2)
$$\|\lambda\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|_1 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(3)
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$
$$= \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

La dimostrazione che $\|\mathbf{x}\|_\infty$ è una norma si svolge in modo analogo.

(b) Per dimostrare che $\|\mathbf{x}\|_1$ non rispetta la legge del parallelogramma possiamo considerare ad esempio $\mathbf{x} = (1, 0)$ e $\mathbf{y} = (0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$. Allora $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (1, 1)$ e $\mathbf{x}-\mathbf{y} = (1, -1)$. Calcoliamo ora le norme

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 1 + 0 = 1, \qquad \|\mathbf{y}\|_1 = 0 + 1 = 1$$
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = 1 + 1 = 2, \qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 = 1 + 1 = 2$$

Quindi

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1^2 = 4+4 \neq 2\|\mathbf{x}\|_1^2+2\|\mathbf{y}\|_1^2 = 4.$$

(c)

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2$$

In questo modo la prima disuguaglianza è dimostrata. Dimostriamo ora la seconda:

$$\|\mathbf{x}\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2) + 2\sum_{i,j=1,i\neq j}^n |x_i||x_j|$$

Dal momento che $\forall i,j \in \{1,\dots n\} \quad 2x_ix_j \leq x_i^2 + x_j^2$,

$$\|\mathbf{x}\|_1^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n (n-1)x_i^2 = \sum_{i=1}^n nx_i^2 = n\|\mathbf{x}\|^2$$

Allo stesso modo si dimostrano le disuguaglianze per $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

(d) Definisco $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}$.

Iniziamo studiando quando $|x_1| + |x_2| = 1$. Sicuramente i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ rispettano questa condizione. Per capire quali sono gli altri punti che la rispettano, riscriviamo la condizione come $|x_2| = 1 - |x_1|$; a questo punto è facile vedere che tutti i punti che rispettano questa condizione sono quelli appartenenti ai 4 segmenti in figura.

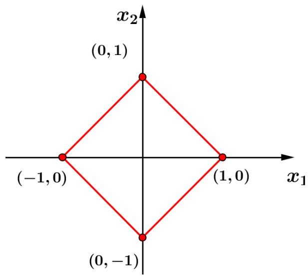

FIGURE 4. $|x_1| + |x_2| = 1$

Grazie a queste considerazioni possiamo disegnare i due insiemi:

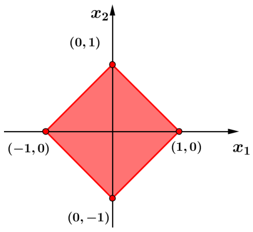

FIGURE 5. $\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1$

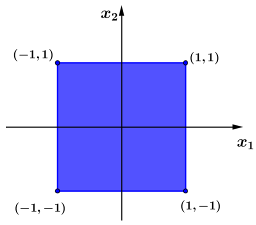

FIGURE 6. $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$

(3) Dimostrate che se $E \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente e $\sup E \notin E$ allora $\sup E$ è di accumulazione per E.

Soluzione

Definiamo $\bar{x} := \sup E$. Ricordiamo che $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \text{ tale che: } \quad x \neq \bar{x} \text{ e inoltre } |x - \bar{x}| < \varepsilon \tag{1}$$

Dal momento che $\bar{x}$ è l'estremo superiore di E abbiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \qquad \bar{x} - \varepsilon < x \leq \bar{x}$$

Poiché $\bar{x} \notin E$, allora $\bar{x} - \varepsilon < x < \bar{x}$, cioè (1) è verificata e $\bar{x}$ è un punto di accumulazione per E.

(4) Siano $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ due punti fissati in $\mathbb{R}^2$. Disegnate i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e stabilite se si tratta di insiemi aperti, chiusi o non aperti né chiusi. Stabilite inoltre quali siano i loro punti di accumulazione, la loro frontiera e la loro chiusura.

(1) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_i \leq x_i \leq a_i + 1\}$;
(2) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$;
(3) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq 2\}$;
(4) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}, \quad \lambda \in [0, 1]\}$;
(5) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad \lambda \in (0, +\infty)\}$;
(6) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad \mu \in (0, +\infty), \ \lambda \in (0, +\infty)\}$;
(7) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \ \lambda \in (0, +\infty)\}$;
(8) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0\}$.

Soluzione

(a) Definisco $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad a_i \leq x_i \leq a_i + 1\}$

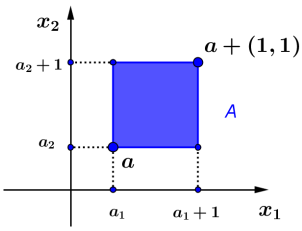

FIGURE 7. L'insieme A

A è un quadrato con bordo, quindi è un insieme chiuso. I punti di frontiera sono tutti quelli sul bordo, cioé tutti i punti per cui $x_i = a_i$ o $x_i = a_i + 1$.
Dal momento che A è chiuso, la sua chiusura coincide con A stesso. Inoltre tutti i punti di A sono di accumulazione perché per ogni intorno del punto posso sempre trovare altri punti che appartengono ad A.

(b) Definisco $B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad 1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$

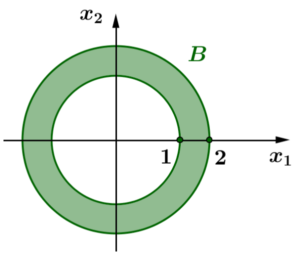

FIGURE 8. L'insieme B

L'insieme B è chiuso perché il bordo appartiene all'insieme stesso. I punti di frontiera sono tutti quelli sul bordo, ovvero tutti gli $\mathbf{x}$ t.c. $\|\mathbf{x}\| = 1$ o $\|\mathbf{x}\| = 2$.
Dal momento che B è chiuso, la sua chiusura coincide con B stesso. Inoltre tutti i punti di B sono di accumulazione perché per ogni intorno del punto posso sempre trovare altri punti che appartengono ad B.

(c) Definisco $C := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad 0 < \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$

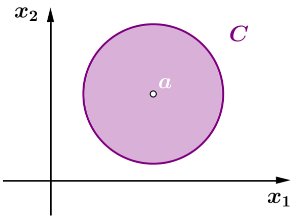

FIGURE 9. L'insieme C

L'insieme C è un cerchio di raggio 2 privato del suo centro $\mathbf{a}$. C non è né aperto né chiuso. La sua frontiera ∂C è data dalla circonferenza esterna piú il punto $\mathbf{a}$:

$$\partial C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = 2\ \} \cup \{\mathbf{a}\}$$

Quindi la chiusura di C è il cerchio, ovvero

$$\bar{C} = C \cup \{\mathbf{a}\}$$

I punti di accumulazione sono tutti i punti dell'insieme C e il punto $\mathbf{a}$.

(d) Definisco $D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}\}$

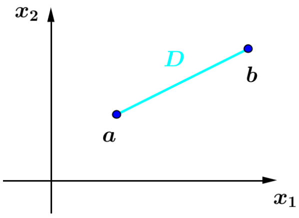

FIGURE 10. L'insieme D

L'insieme D è chiuso: in particolare tutti i suoi punti sono di frontiera. Perció la chiusura di D è l'insieme stesso. Tutti i punti di D sono di accumulazione.

(e) Definisco $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \qquad \lambda \in (0, +\infty)\}$

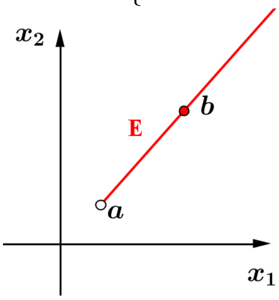

FIGURE 11. L'insieme E

L'insieme E è una semiretta con origine in a. La semiretta è aperta perché non contiene l'origine. La frontiera di E è data da

$$\partial E = E \cup \{\mathbf{a}\}$$

La chiusura di E è $\bar{E} = E \cup \{\mathbf{a}\}$ ovvero è la semiretta con l'origine inclusa. I punti di accumulazione sono tutti i punti di $\bar{E}$.

(f) Definisco $F := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \qquad \lambda, \mu \in (0, +\infty)\}$

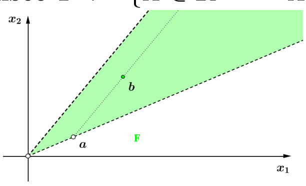

FIGURE 12. L'insieme F

L'insieme F è una parte di piano aperta come in figura. La sua frontiera è data dalle due semirette che delimitano la porzione di piano:

$$\partial F = \{\mathbf{x} = \mu\mathbf{a}\} \cup \{\mathbf{x} = \lambda\mathbf{b}\} \qquad \lambda, \mu \in [0, +\infty)$$

La chiusura di F è $\bar{F} = F \cup \partial F$. I punti di accumulazione sono tutti i punti di $\bar{F}$.

(g) Definisco $G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \qquad \lambda \in (0, +\infty), \mu \in \mathbb{R}\}$

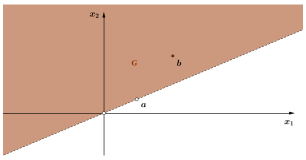

Figure 13. L'insieme G

L'insieme G è un semipiano aperto come in figura. La sua frontiera è data dalla retta che delimita il semipiano:

$$\partial G = \{\mathbf{x} = \mu\mathbf{a} \quad \mu \in (0, +\infty)\}$$

La chiusura di G è data dal semipiano chiuso, ovvero dall'insieme G e dalla retta $\{\mathbf{x} = \mu\mathbf{a}\}$. I punti di accumulazione sono tutti i punti di $\bar{G}$.

(h) Definisco $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 < \mathbf{x}, \mathbf{a} >= 0\}$

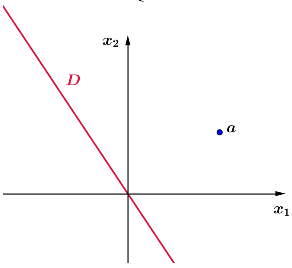

Figure 14. L'insieme H

L'insieme H è chiuso: in particolare tutti i suoi punti sono di frontiera. Perció la chiusura di H è l'insieme stesso. I punti di accumulazione sono tutti i punti di H.

(5) Determinate tutti i punti di accumulazione del sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ definito da

$$E := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m \neq 0, n \neq 0 \right\}.$$

Soluzione

Proviamo a capire com'è fatto l'insieme E. Teniamo fissa una delle due variabili (ad esempio m): allora possiamo definire l'insieme E_m al variare di n:

$$E_m := \left\{ \frac{1}{m} + 1, \frac{1}{m} + \frac{1}{2}, \frac{1}{m} + \frac{1}{3}, \frac{1}{m} + \frac{1}{4} \dots \right\}$$

Ad esempio

$$E_1 = \left\{ 1 + 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4} \dots \right\} = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \dots \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

L'insieme di partenza puó essere visto come l'unione di tutti gli E_m:

$$E = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \neq 0}} E_m$$

Tenendo m fissato, otteniamo una successione $x_n = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ nella sola variabile n che converge al valore $\frac{1}{m}$, cioé

$$lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{m}$$

Questo significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall n > \bar{n} \quad \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$

Grazie a questa proprietà, in ogni intorno di un punto della forma $\frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ troveremo sempre almeno un punto della successione x_n. Quindi tutti i punti della forma $\frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ sono punti di accumulazione per l'insieme E perché

$$\forall \delta > 0 \quad \left(\frac{1}{m} - \delta, \frac{1}{m} + \delta \right) \cap E \neq 0$$

In questo modo abbiamo trovato che $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$ sono alcuni punti di accumulazione di E, ma non sono tutti! Infatti anche 0 è un punto di accumulazione. Se facciamo tendere entrambe le variabili a infinito troviamo che $x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \to 0$. Per la definizione stessa di limite, troviamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \bar{m} \in \mathbb{N} \quad \forall n > \bar{n}, \forall m > \bar{m} \quad \left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

Quindi in ogni intorno del punto 0 possiamo sempre trovare infiniti elementi che appartengono all'insieme E: 0 è un punto di accumulazione.

(6) (*Molto difficile*) Dimostrate che:
se $\| \cdot \|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ è una norma, cioè soddisfa le proprietà:

$(N1)$: $\|\mathbf{x}\|_* \geq 0$ e $\|\mathbf{x}\|_* = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
$(N2)$: $\|\lambda \mathbf{x}\|_* = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|_*$;
$(N3)$: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_* \leq \|\mathbf{x}\|_* + \|\mathbf{y}\|_*$.

e inoltre $\| \cdot \|_*$ soddisfa la proprietà del parallelogramma

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_*^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_*^2 = 2\|\mathbf{x}\|_*^2 + 2\|\mathbf{y}\|_*^2,$$

allora $\| \cdot \|_*$ "proviene" da un prodotto scalare, cioè esiste un *prodotto scalare* $\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\|\mathbf{x}\|_* = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_*^{1/2}.$$

Soluzione

Definiamo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* := \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_*^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_*^2 \right)$$

Chiaramente

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_* := \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{x} + \mathbf{x}\|_*^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|_*^2 \right) = \frac{1}{4} \left(4\|\mathbf{x}\|_*^2 - 0 \right) = \|\mathbf{x}\|_*^2$$

Verifichiamo che $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ è un prodotto scalare. Dobbiamo quindi verificare che

$(S1)$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_* \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_* = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$
$(S2)$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_* \quad \lambda \in \mathbb{R}$
$(S3)$: $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_*$
$(S4)$: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_* = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_* + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_*$

$(S1)$: Verificare queste proprietà è immediato dalla definizione che abbiamo dato:
$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_* = \|\mathbf{x} + \mathbf{x}\|_*^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|_*^2 = \|2\mathbf{x}\|_*^2 - \|\mathbf{0}\|_*^2 = \|2\mathbf{x}\|_*^2 - 0 = 4\|\mathbf{x}\|_*^2 \geq 0$.
Inoltre $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_* = 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_*^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$.

$(S2)$: Anche questa proprietà segue dalla definizione del prodotto:

$$\begin{aligned}4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_* &= \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_*^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2=\|\mathbf{y}+\mathbf{x}\|_*^2-\|(-1)(\mathbf{y}-\mathbf{x})\|_*^2=\\ &=\|\mathbf{y}+\mathbf{x}\|_*^2-(-1)^2\|(\mathbf{y}-\mathbf{x})\|_*^2=\|\mathbf{y}+\mathbf{x}\|_*^2-\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_*^2=4\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle_*\end{aligned}$$

$(S4)$: Dimostriamo che $4\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle_*=4\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle_*+4\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle_*$, cioé che

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\|_*^2-\|\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2=\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|_*^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_*^2+\|\mathbf{y}+\mathbf{z}\|_*^2-\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2$$

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\|_*^2-\|\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2=\|(\mathbf{x}+\mathbf{z})+\mathbf{y}\|_*^2-\|(\mathbf{x}-\mathbf{z})+\mathbf{y}\|_*^2=2\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|_*^2+\cancel{2\|\mathbf{y}\|_*^2}-\|\mathbf{x}+\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_*^2\\ &-2\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_*^2-\cancel{2\|\mathbf{y}\|_*^2}+\|\mathbf{x}-\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_*^2=2\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|_*^2-2\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_*^2-\|(\mathbf{z}-\mathbf{y})+\mathbf{x}\|_*^2+\|(-\mathbf{z}-\mathbf{y})+\mathbf{x}\|_*^2=\\ &2\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|_*^2-2\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_*^2-2\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2-\cancel{2\|\mathbf{x}\|_*^2}+\|\mathbf{z}-\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_*^2+2\|\mathbf{y}+\mathbf{z}\|_*^2+\cancel{2\|\mathbf{x}\|_*^2}-\|-\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato che

$$2\|\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\|_*^2-2\|\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2=2\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|_*^2-2\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|_*^2+2\|\mathbf{y}+\mathbf{z}\|_*^2-2\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|_*^2$$

$(S3)$: Dimostriamo questa proprietà in 4 passi:

(a) Dimostriamo che vale per tutti i naturali, iniziando con $\lambda=2$

$$\langle 2\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\mathbf{x}+\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*$$

Per induzione è immediato verificare che $\langle n\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=n\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*$ vale $\forall n\in\mathbb{N}$.

(b) Dimostriamo che *S3* vale per tutti gli interi.
Osserviamo che $\langle-\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*$, infatti

$$0=\langle\mathbf{0},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\mathbf{x}-\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*+\langle-\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*.$$

Perciò abbiamo verificato $\langle n\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=n\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*$ vale $\forall n\in\mathbb{Z}$.

(c) Estendiamo i risultati precedenti a $\mathbb{Q}$ dimostrando che $\langle\frac{1}{n}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\frac{1}{n}\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*$. Questo vale perché $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\frac{1}{n}\mathbf{x}+\cdots+\frac{1}{n}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\frac{1}{n}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*+\cdots+\langle\frac{1}{n}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=n\langle\frac{1}{n}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*$
In questo modo, utilizzando anche i precedenti (a) e (b) abbiamo dimostrato che, per ogni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$,

$$\langle q\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=q\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*\qquad\text{per ogni } q\in\mathbb{Q}\tag{2}$$

(d) Ora non ci resta che dimostrare che (2) vale per ogni $q=\lambda\in\mathbb{R}$.
Iniziamo dimostrando che, per ogni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ fissati, la funzione

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ definita da: }\lambda\mapsto\langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*\tag{3}$$

è continua in 0. Cioè che

$$\lim_{\lambda\to0}\langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\lim_{\lambda\to0}\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\langle\mathbf{0},\mathbf{y}\rangle_*=0.\tag{4}$$

Osserviamo che

$$4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*=\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_*^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2=\|2\mathbf{x}+(\mathbf{y}-\mathbf{x})\|_*^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2,$$

e inoltre che, grazie alla proprietà *S4*,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_*^2\le\|\mathbf{x}\|_*^2+\|\mathbf{y}\|_*^2+2\|\mathbf{x}\|_*\|\mathbf{y}\|_*$$

Quindi

$$\begin{aligned}0&\le\left|4\langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_*\right|\\ &\le\left|4\|\lambda\mathbf{x}\|_*^2+\cancel{\|\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2}+4\|\lambda\mathbf{x}\|_*\|\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*-\cancel{\|\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2}\right|\\ &\le4\lambda^2\|\mathbf{x}\|_*^2+4|\lambda|\|\mathbf{x}\|_*\|\lambda\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*\end{aligned}$$

e, per il Teorema dei Carabinieri, abbiamo dimostrato (4).

Grazie alla proprietà *S4*, possiamo provare che (2) è vera per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Infatti, sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $(q_n)_n$ una successione di *numeri razionali* tali che

$$\lim_{n \to +\infty} q_n = \lambda.$$

Allora, per ogni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ fissati,

$$\begin{aligned}
\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* &= \lim_{n \to +\infty} q_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle q_n \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* \qquad \text{poiché S3 è vera per i razionali} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle (q_n - \lambda)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* + \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* \qquad \text{per la S4 già dimostrata} \\
&= 0 + \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* \qquad \text{usando (4), poiché } \lim_{n \to +\infty} (q_n - \lambda) = 0 \\
&= \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_*.
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione.