SOLUZIONI – SETTIMANA 16

(1) *(Esercizio 20 pag 180)* Determinate la classe limite in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ delle seguenti successioni:

(a) $1 - \cos(n\pi)$;
(Soluzione): $1 - \cos(n\pi) = (-1)^n$ quindi la classe limite è formata dai due numeri $\{-1, 1\}$.

(b) $(-1)^n \dfrac{n+1}{n-1}$; $\qquad (-1)^n \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$;
(Soluzione):
La classe limite di $(-1)^n \dfrac{n+1}{n-1}$ è $\{-1, 1\}$.
La classe limite di $(-1)^n \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$ è $\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$.

(c) $n\sin(n\pi/2)$; $\qquad \dfrac{n}{n+1}\sin(n\pi/4)$; $\qquad \dfrac{2n}{n+1}\sin(n\pi/8)$;
(Soluzione):
$n\sin(n\pi/2)$: classe limite $= \{-\infty, 0, \infty\}$.
$\dfrac{n}{n+1}\sin(n\pi/4)$: classe limite $= \{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\}$.
$\dfrac{2n}{n+1}\sin(n\pi/8)$: classe limite $= \{0, \pm 2\sin(\pi/8), \pm\sqrt{2}, \pm 2\sin(3\pi/8), \pm 2\}$.

(d) $s_n := \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$;
(Soluzione): La classe limite è l'intero intervallo $[0, 1]$. Per dimostrare questo fatto, poiché la classe limite è un insieme chiuso, basta dimostrare che ogni razionale $\frac{q}{p}$, tale che sia $0 \le \frac{q}{p} \le 1$, appartiene alla classe limite (*Spiegate bene perché è sufficiente dimostrare che i razionali sono nella classe limite*).

(i) $s_{k^2} := \sqrt{k^2} - [\sqrt{k^2}] = k - k = 0$ quindi 0 sta nella classe limite;
(ii) osserviamo che per k intero e $k \ge 1$

$$k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$$

e quindi $[\sqrt{k^2+2k}] = k$. Allora

$$s_{k^2+2k} = \sqrt{k^2+2k} - k = k\left(\sqrt{1 + \frac{2}{k}} - 1\right) \sim k\frac{1}{2}\frac{2}{k} = 1, \quad \text{per } k \to +\infty$$

e quindi $\lim_{k\to+\infty} s_{k^2+2k} = 1$ e 1 sta nella classe limite;

(iii) siano q, p interi tali che $0 < q < p$ e quindi tali che $0 < \frac{q}{p} < 1$. Osserviamo che per k intero e $k \ge 1$

$$(kp)^2 < (kp)^2 + 2kq < (kp)^2 + 2kp + 1 = (kp+1)^2$$

e quindi $\left[\sqrt{(kp)^2+2kq}\right] = kp$. Allora, per $k \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
s_{(kp)^2+2kq} &:= \sqrt{(kp)^2+2kq} - \left[\sqrt{(kp)^2+2kq}\right] \\
&= \sqrt{(kp)^2+2kq} - kp \\
&= kp\left(\sqrt{1+\frac{2q}{kp^2}} - 1\right) \\
&\sim kp\frac{q}{kp^2} = \frac{q}{p}
\end{aligned}$$

quindi $\lim_{k\to+\infty} s_{(kp)^2+2kq} = \frac{q}{p}$ e $\frac{q}{p}$ sta nella classe limite.

(2) *(Esercizio 21 pag 180)* Dimostrate che se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sono successioni di numeri reali, allora

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \le \liminf_{n\to+\infty}(x_n+y_n) \\
&\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n) \le \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n.
\end{aligned}$$

Mostrate con degli esempi che le disuguaglianze possono essere strette.

(3) Sia $(x_n)_n$ una successione di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ si dice *maggiorante definitivo* per $(x_n)_n$ se esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \le y$ per tutti gli $n \ge n_0$ (Equivalentemente: se la disuguaglianza $x_n > y$ è vera solo per al più un numero finito di indici).
Dimostrate che

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lambda \text{ se e solo se } \lambda = \inf\{y : y \text{ maggiorante definitivo di } (x_n)_n\}.$$

Come si modifica l'affermazione precedente se $\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$?
Enunciate anche l'analoga equivalenza per $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lambda$.

(4) Costruite esplicitamente una copertura aperta e infinita di $F := [-1,1] \setminus \{0\}$ che non ammette sottocoperture finite.

Soluzione: Prendiamo $U_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $U_0 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e $V_n = (-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+2})$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $V_0 = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Allora abbiamo

$$F \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n\,.$$

Tuttavia non possiamo estrarre una sottocopertura finita in quanto per ogni $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\bigcup_{n=0}^{N} U_n \cup \bigcup_{n=0}^{N} V_n \subset F\,.$$

(5) Dimostrate che se $E \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente e $\sup E \notin E$ allora $\sup E$ è un punto di accumulazione di E.

Soluzione: Sia $\sup E = l < \infty$, dalla definizione di estremo superiore per un insieme abbiamo che esiste $\epsilon > 0$ tale per cui esiste $x \in E$ tale che $l - \epsilon < x < l$, ovvero l è di accumulazione per E.

(6) *(Esercizi 9 pag 132)* Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Dimostrate che E è connesso se e solo se non è unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

Soluzione: Dimostriamo la tesi per assurdo, assumiamo che E non sia connesso, ovvero esistono due insiemi X e Y separati tali che $E = X \cup Y$. Siano ora $G = \bar{X}^C$ e $H = \bar{Y}^C$, chiaramente G e H sono aperti, dal fatto che X e Y sono separati, ovvero non hanno punti di accumulazione in comune, possiamo affermare che G e H sono disgiunti. Infine dal fatto che $X = E \setminus Y = Y^C$ abbiamo che $X = H$ e in maniera analoga possiamo affermare che $Y = G$. Abbiamo dunque $E = X \cup Y = G \cup H$ e abbiamo dimostrato la prima implicazione.

Assumiamo ora che esistano due insiemi G e H disgiunti aperti non vuoti tali per cui $E = G \cup H$, allora possiamo affermare che G e H non contengono i punti di accumulazione l'uno dell'altro e sono dunque separati; supponiamo infatti che esista g di accumulazione di G tale per cui $g \in H$. Siccome H è aperto esiste $\epsilon > 0$ tale per cui $B(g, \epsilon) \subset H$, ma allora siccome g è accumulazione per G avremmo che $G \cap H \neq \emptyset$ ma è assurdo perché abbiamo supposto H e G disgiunti. Segue immediatamente che E non è connesso.

(7) Determinate tutti i punti di accumulazione del sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ definito da

$$E := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m \neq 0, n \neq 0 \right\}$$

Soluzione: Abbiamo che i punti di accumulazione di E sono l'insieme

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dimostriamo che i punti precedenti sono gli unici possibili punti di accumulazione. Scriviamo l'insieme E nel modo seguente

$$E = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+\frac{1}{2} & \dots & 1+\frac{1}{n} & \dots \\ \frac{1}{2}+1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2}+\frac{1}{n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ \frac{1}{m}+1 & \frac{1}{m}+\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{m}+\frac{1}{n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

Prendiamo una successione $(a_n)_n \subset E$, allora abbiamo tre possibilità:
(i): $(a_n)_n$ contiene infiniti elementi della riga $\bar{m}$, quindi a_n converge a $\frac{1}{\bar{m}}$;
(ii): $(a_n)_n$ contiene infiniti elementi della colonna $\bar{n}$, quindi a_n converge a $\frac{1}{\bar{n}}$;
(iii): $(a_n)_n$ contiene finiti elementi di ogni riga e colonna, quindi a_n converge a 0;
Dunque l'insieme trovato in precedenza contiene tutti e soli i punti di accumulazione di E.

(8) Costruite un compatto di $\mathbb{R}$ con una infinità numerabile di punti di accumulazione.

Soluzione: Consideriamo

$$E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cap \{0\}.$$

Abbiamo dimostrato prima che i punti di accumulazione di E sono dati da

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

per cui tutti i punti di accumulazione di E appartengono ad E, dunque è chiuso. Inoltre i punti di accumulazione sono una infinità numerabile.

(9) Considerate l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ con la (solita) distanza $d(p,q) := |p-q|$ e il suo sottoinsieme
$$E := \{p \in \mathbb{Q} :\ 2 < p^2 < 7\}.$$
Dimostrate che E è chiuso, limitato ma non compatto.

Soluzione: Chiaramente E è limitato, dimostriamo ora che E è chiuso. Dal momento che $\sqrt{2}$, $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$ abbiamo che E^C è dato da
$$E^C = \{p \in \mathbb{Q} \,:\, d(p,0) < \sqrt{2}\,,\, d(p,0) > \sqrt{7}\}\,,$$
che è un insieme aperto, da cui E è chiuso.

Consideriamo ora la seguente sottocopertura infinita di E,
$$U_n = \{p \in \mathbb{Q} \,:\, d(p,0) < \sqrt{7} - \frac{1}{n}\}\,, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,$$
allora abbiamo chiaramente che
$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\,,$$
ma non possiamo estrarre una sottocopertura finita, ovvero E non è compatto.

(10) Ricordate che se $E \subset \mathbb{R}^n$ allora con $\bar{E}$ si indica l'insieme chiuso definito da $\bar{E} := E \cup \partial E$. L'insieme $\bar{E}$ si chiama la chiusura di E.
Dimostrate che se $E \subset \mathbb{R}$ non ha punti isolati anche $\bar{E}$ non ha punti isolati.

Soluzione: Dimostriamo per assurdo: sia e punto isolato di $\bar{E}$, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $\bar{E} \cap (e-\epsilon, e+\epsilon) = \{e\}$. Ma allora anche $E \cap (e-\epsilon, e+\epsilon) = \{e\}$, ovvero e è punto isolato di E, che nega l'ipotesi.

(11) *(Difficile)* Determinate la classe limite per $x \to +\infty$ di
$$f(x) := \frac{\log x}{\log\left(1 + |x \sin x|\right)}.$$
(Soluzione): La classe limite è $[-1, \infty) \cup \{\infty\}$.
(Suggerimento): Osservate che $f(x) > 0$ per $x > 1$; provate che per ogni $0 < \lambda < 1$ la funzione f è definitivamente maggiore di λ per $x \to +\infty$ e quindi nessun numero minore di 1 può appartenere alla classe limite.
Osservate che $\lim\limits_{k\to+\infty} f(k\pi + \pi/2) = 1$ e quindi 1 è un valore limite.
Utilizzate il fatto che f ha un asintoto verticale in ogni punto $x = k\pi$, per $k + 1, 2, 3, \ldots$, insieme al teorema dei valori intermedi per le funzioni continue, per dimostrare che ogni numero maggiore di 1 è un valore limite per f.
Infine provate che $\lim\limits_{k\to+\infty} f(k\pi - 1/k) = +\infty$