SETTIMANA 17 – ALCUNE SOLUZIONI

(Es. 2) *Siano* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue. Utilizzando la definizione di limite dimostrate che* $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione continua.*

(Soluzione):

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato e chiamiamo $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$. Sia $\epsilon_g > 0$ fissato, dalla continuità di g segue che esiste $\delta_g > 0$ t.c.

$$|y - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \delta_g \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon_g \,. \tag{1}$$

Ora dalla continuità di f sappiamo inoltre che fissato $\epsilon_f > 0$ esiste $\delta_f > 0$ t.c.

$$\|x - x_0\| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon_f \,. \tag{2}$$

Combinando ora le equazioni (1)–(2) otteniamo che fissato $\epsilon_g > 0$, esiste $\delta_f > 0$ t.c.

$$\|x - x_0\| < \delta_f \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon_g \,,$$

da cui la continuità di h in x_0. Dal fatto che f e g sono continue in tutto il loro dominio segue la continuità di h su tutto il suo dominio.

(Es. 3) Determinate e disegnate sul piano $\mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti (x, y) per i quali le seguenti espressioni algebriche sono ben definite come numeri reali

$$f(x, y) = \frac{\log x\sqrt{y - x}}{xy - 1} \,, \quad g(x, y) = \frac{1 + \sqrt{y(\sin x - 1)}}{\sqrt{y - x(x - 10)}} \,.$$

Soluzione: Studiamo prima

$$\frac{\log x\sqrt{y - x}}{xy - 1} \,,$$

sappiamo che è ben definita per

$$\begin{cases} x\sqrt{y - x} > 0 \,, \\ y - x \geq 0 \,, \\ xy \neq 1 \,. \end{cases} \tag{3}$$

La seconda disequazione in (3) è soddisfatta per $y \geq x$, (il semipiano che sta sopra la bisettrice del $I - III$ quadrante); la prima disequazione è soddisfatta per $\{x > 0\} \cap \{y > x\}$; l'ultima disuguaglianza equivale a $y \neq \frac{1}{x}$.

Concludendo il dominio è dato dalla regione di piano D_1 definita da

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \,, y > x \,, y \neq \frac{1}{x} \right\} . \tag{4}$$

$$\frac{1 + \sqrt{y(\sin x - 1)}}{\sqrt{y - x(x - 10)}} \,,$$

È ben definita per

$$\begin{cases} y(\sin x - 1) \geq 0 \,, \\ y - x(x - 10) > 0 \,. \end{cases} \tag{5}$$

La prima disequazione in (5) è soddisfatta per $\{y \le 0\} \cup \{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$, mentre la seconda disequazione è soddisfatta per $y > x^2 - 10x$.

Otteniamo in conclusione il seguente dominio

(6)
$$D_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \le 0\,, y > x^2 - 10x\big\}\,.$$

(Es. 7) Determinate la classe limite per $x \to +\infty$ di

$$f(x) := \frac{x}{1+x}\sin x.$$

(Soluzione): La classe limite è l'intero intervallo $[-1, 1]$.

(Es. 8) *(Difficile)* Determinate la classe limite per $x \to +\infty$ di

$$f(x) := \frac{\log x}{\log(1 + |x \sin x|)}.$$

(Soluzione): La classe limite è $[-1, \infty) \cup \{\infty\}$.

(Suggerimento): Osservate che $f(x) > 0$ per $x > 1$; provate che per ogni $0 < \lambda < 1$ la funzione f è definitivamente maggiore di λ per $x \to +\infty$ e quindi nessun numero minore di 1 può appartenere alla classe limite.

Osservate che $\lim_{k\to+\infty} f(k\pi + \pi/2) = 1$ e quindi 1 è un valore limite.

Utilizzate il fatto che f ha un asintoto verticale in ogni punto $x = k\pi$, per $k + 1, 2, 3, \ldots$, insieme al teorema dei valori intermedi per le funzioni continue, per dimostrare che ogni numero maggiore di 1 è un valore limite per f.

Infine provate che $\lim_{k\to+\infty} f(k\pi - 1/k) = +\infty$

(Es. 12): *Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo*

$$f(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}\,.$$

È possibile definire f anche nel punto $(0,0)$ in modo che la nuova funzione f, il cui dominio ora sia tutto $\mathbb{R}^2$, sia continua in $(0,0)$?

Soluzione: Consideriamo la funzione f lungo due rette $y = \alpha x$ e $y = \beta x$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \ne \beta$. Allora otteniamo lungo $y = \alpha x$

$$f(x, \alpha x) = \frac{\alpha^2 x^2}{\sqrt{x^4 + \alpha^4 x^4}} = \frac{\alpha^2 x^2}{\sqrt{(1+\alpha^4)x^4}} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^4}}\,,$$

mentre lungo la retta $y = \beta x$ otteniamo

$$f(x, \beta x) = \frac{\beta^2 x^2}{\sqrt{x^4 + \beta^4 x^4}} = \frac{\beta^2 x^2}{\sqrt{(1+\beta^4)x^4}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{1+\beta^4}}\,.$$

Siccome abbiamo assunto $\alpha \ne \beta$ anche $\frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^4}} \ne \frac{\beta^2}{\sqrt{1+\beta^4}}$ da cui segue immediatamente

$$\lim_{x\to 0} f(x, \alpha x) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^4}} \ne \frac{\beta^2}{\sqrt{1+\beta^4}} = \lim_{x\to 0} f(x, \beta x)\,.$$

Possiamo dunque concludere che non possiamo estendere con continuità f in $(0,0)$.

Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando le coordinate polari. Consideriamo dunque il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Sostituendo dunque in f otteniamo

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4\sin^4\theta}} = \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\sqrt{\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}} = \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}\,.$$

In maniera analoga al calcolo precedente abbiamo dunque

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta) = \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}$$

ovvero otteniamo valori differenti per diversi valori dell'angolo θ.

(Es 13): *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Verificate che f non è continua lungo l'asse delle ordinate. Determinate un insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(0,0) \in C$ e inoltre $f : C \to \mathbb{R}$ sia continua.

(Soluzione): Sia $\bar{y} > 0$ fissato, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x,\bar{y}) = \frac{x^2+\bar{y}^2}{x} = \infty\,,$$

da cui segue immediatamente la tesi.

Consideriamo ora le rette di equazione $y = \lambda x$, $\lambda \in [-1,1]$, notiamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \frac{x^2+\lambda^2x^2}{x} = (1+\lambda^2)x = 0\,, \quad \lambda \in [-1,1]\,,$$

dunque la funzione è continua lungo le rette $y = \lambda x$, $\lambda \in [-1,1]$ e in particolare f ristretta sul dominio

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq |x|\,,\, y \geq -|x|\}\,,$$

è continua.