SETTIMANA 18 – ALCUNE SOLUZIONI

Calcolate le derivate parziali prime, seconde, vettore gradiente e matrice Hessiana (dove esistono) di

$$f(x,y) = 2^{x^2+xy+y^2}\,,$$
$$f(x,y,z) = \sinh(ax+by^2+cz^3)\,,$$
$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

(1) Consideriamo

$$f(x,y) = 2^{x^2+xy+y^2}\,.$$

La funzione è composizione di un esponenziale e di un polinomio (in 2 variabili), quindi è infinitamente derivabile. Calcolando

$$D_x f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}(2x+y),$$
$$D_y f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}(2y+x)$$

e quindi il gradiente è il vettore

$$\nabla f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}\left((2x+y)\mathbf{e}_1 + (2y+x)\mathbf{e}_2\right).$$

Tutte le derivate seconde esistono:

$$D_{xx} f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}\left(2+\log\, 2\,(2x+y)^2\right)\,,$$
$$D_{yy} f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}\left(2+\log\, 2\,(2y+x)^2\right)\,,$$
$$D_{xy} f(x,y) = D_{yx} f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}\left(1+\log 2(2y+x)(2x+y)\right)\,,$$

e la matrice Hessiana:

$$\mathbf{H}f(x,y) = \log 2\, 2^{x^2+xy+y^2}\begin{bmatrix} 2+\log\, 2\,(2x+y)^2 & 1+\log 2(2y+x)(2x+y) \\ 1+\log 2(2y+x)(2x+y) & 2+\log\, 2\,(2y+x)^2 \end{bmatrix}$$

(2) Consideriamo ora

$$f(x,y,z) = \sinh(ax+by^2+cz^3)\,.$$

La funzione è composizione di una funzione infinitamente derivabile e di un polinomio (in 3 variabili), quindi è infinitamente derivabile.

Abbiamo 3 derivate parziali prime

$$D_x f(x,y,z) = a\cosh(ax+by^2+cz^3)$$
$$D_y f(x,y,z) = 2by\cosh(ax+by^2+cz^3)\,,$$
$$D_z f(x,y,z) = 3cz^2\cosh(ax+by^2+cz^3)\,,$$

e quindi il gradiente è il vettore

$$\nabla f(x,y,z) = \cosh(ax+by^2+cz^3)\left(a\,\mathbf{e}_1 + 2by\,\mathbf{e}_2 + 3cz^2\,\mathbf{e}_3\right)$$

e 9 (solo 6 distinte fra loro) derivate seconde:

$$
\begin{aligned}
D_{xx}f(x,y,z) &= a^2\cosh(ax+by^2+cz^3)\,,\\
D_{yy}f(x,y,z) &= 2b\cosh(ax+by^2+cz^3)+4b^2y^2\sinh(ax+by^2+cz^3)\,,\\
D_{zz}f(x,y,z) &= 6cz\cosh(ax+by^2+cz^3)+9c^2z^4\sinh(ax+by^2+cz^3)\,,\\
D_{xy}f(x,y,z) &= D_{yx}f(x,y,z) = 2aby\sinh(ax+by^2+cz^3)\,,\\
D_{xz}f(x,y,z) &= D_{zx}f(x,y,z) = 3acz^2\sinh(ax+by^2+cz^3)\,,\\
D_{yz}f(x,y,z) &= D_{zy}f(x,y,z) = 6bcyz^2\sinh(ax+by^2+cz^3)\,,
\end{aligned}
$$

quindi la matrice Hessiana è

$$
\mathbf{H}f(x,y,z) =
$$

$$
\cosh(ax+by^2+cz^3)\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & 2b & 0\\ 0 & 0 & 6cz\end{bmatrix}+\sinh(ax+by^2+cz^3)\begin{bmatrix} 0 & 2aby & 3acz^2\\ 2aby & 4b^2y^2 & 6bcyz^2\\ 3acz^2 & 6bcyz^2 & 9c^2z^4\end{bmatrix}.
$$

(3) Consideriamo

$$
r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2} := \|\mathbf{x}\|\ .
$$

Questa funzione è infinitamente derivabile per $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Non è derivabile nel punto $(x,y,z)=(0,0,0)$

Abbiamo dunque che, per $(x,y,z)\neq(0,0,0)$,

$$
\begin{aligned}
D_xf(x,y,z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\|\mathbf{x}\|}\\
D_yf(x,y,z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\|\mathbf{x}\|}\\
D_zf(x,y,z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\|\mathbf{x}\|}
\end{aligned}
$$

e quindi il gradiente è il vettore

$$
\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\,(x\,\mathbf{e}_1+y\,\mathbf{e}_2+z\,\mathbf{e}_3)
$$

per $\|\mathbf{x}\|\neq 0$.

Le derivate seconde sono

$$
\begin{aligned}
D_{xx}f(x,y,z) &= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2+z^2}{\|\mathbf{x}\|^3},\\
D_{yy}f(x,y,z) &= \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+z^2}{\|\mathbf{x}\|^3},\\
D_{zz}f(x,y,z) &= \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+y^2}{\|\mathbf{x}\|^3},\\
D_{xy}f(x,y,z) &= D_{yx}f(x,y,z) = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{xy}{\|\mathbf{x}\|^3},\\
D_{xz}f(x,y,z) &= D_{zx}f(x,y,z) = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{xz}{\|\mathbf{x}\|^3},\\
D_{yz}f(x,y,z) &= D_{zy}f(x,y,z) = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{yz}{\|\mathbf{x}\|^3},
\end{aligned}
$$

quindi la matrice Hessiana è

$$(\mathbf{H}r)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}.$$

(4) Calcolate il gradiente di

$$f(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} \frac{\sin t}{1+t^2} dt\,.$$

La funzione è infinitamente derivabile.

$$D_x f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2} 2x$$

$$D_y f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2} 2y\,.$$

e quindi il gradiente è il vettore

$$\nabla f(x,y) = \frac{2\sin(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2}\,(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2)\,.$$

Le derivate di ordine superiore sono molto lunghe da scrivere. Per esempio

$$D_{xx} f(x,y) = \frac{2(2x^2(1+x^4+2x^2y^2+y^4)\cos(x^2+y^2) + (1-3x^4-2x^2y^2+y^4)\sin(x^2+y^2))}{(1+x^4+2x^2y^2+y^4)^2}\,,$$

$$D_{yy} f(x,y) = \frac{2(2y^2(1+x^4+2x^2y^2+y^4)\cos(x^2+y^2) + (1-3y^4-2x^2y^2+x^4)\sin(x^2+y^2))}{(1+x^4+2x^2y^2+y^4)^2}\,,$$

$\dots$