SETTIMANA 19 – ALCUNE SOLUZIONI

(Es 4) *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x, y) = 4x^4 + xy^2.$$

(a) *Scrivete l'equazione della perpendicolare al grafico di* f *nel punto* $(1, 2, f(1, 2))$*;*
(b) *Calcolate* $\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1, 3)$*;*
(c) *Visto che il più è fatto, calcolate anche* $\min_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1, 3)$ *e* $\min_{\|\mathbf{v}\|=1} |D_{\mathbf{v}} f(1, 3)|$.

(Soluzione):
(a) Calcoliamo prima il piano tangente a f in $(1, 2, f(1, 2))$. Abbiamo

$$D_x f(x, y)|_{(1,2)} = 16x^3 + y^2\Big|_{(1,2)} = 20\,, \quad D_y f(x, y)|_{(1,2)} = 2xy|_{(1,2)} = 4\,,$$

da cui otteniamo che il piano tangente a f ha equazione

$$z = f(1, 2) + 20(x - 1) + 4(y - 2)\,.$$

$$20x + 4y - z - 20 = 0\,.$$

Il piano tangente è ortogonale al vettore $\mathbf{n}$ di componenti $\pm(20, 4, -1)$. Scriviamo la retta normale in forma parametrica:

$$\gamma : t \mapsto (1, 2, f(1, 2)) + \mathbf{n}t.$$

La retta normale è la retta data in forma parametrica da

$$\gamma : t \mapsto (1 + 20t, 2 + 4t, 8 - t)\,.$$

(b) Sappiamo dalla teoria che

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1, 3) = \langle \nabla f(1, 3), \frac{\nabla f(1, 3)}{\|\nabla f(1, 3)\|} \rangle = \|\nabla f(1, 3)\|\,.$$

Poiché $(\nabla f)(1, 3) = 25\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1, 3) = \sqrt{661}.$$

(c) Il minimo è ottenuto per

$$\mathbf{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\,,$$

da cui

$$\min_{\|\mathbf{v}\|=1} D_{\mathbf{v}} f(1, 3) = -\langle \nabla f(1, 3), \frac{\nabla f(1, 3)}{\|\nabla f(1, 3)\|} \rangle = -\|\nabla f(1, 3)\| = -\sqrt{661}.$$

Invece

$$|D_{\mathbf{v}} f(x, y)| = |\langle \nabla f(x, y), \mathbf{v} \rangle|$$

è minimizzata se $\mathbf{v}_\perp$ è ortogonale a $\nabla f(x, y)$ da cui $\min_{\|\mathbf{v}\|=1} |D_{\mathbf{v}} f(1, 3)| = 0$.

(Es 6): *(Esercizio 1 pag 335): Studiate, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità nell'origine della funzione*

$$f(x,y,z) := \begin{cases} z^4 \dfrac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Osservazione. C'è un errore nella formulazione del problema: se $\alpha < 0$, la funzione non è ben definita nei punti $(0,0,z)$. Chiedo scusa!
Una formulazione corretta del problema è la seguente:

Studiate, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y,z) := \begin{cases} z^4 \dfrac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,z) \\ \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,z) \end{cases}$$

(Soluzione):

Se $(\alpha < 0)$**:** La funzione f non è limitata in alcun intorno di $(0,0,0)$, quindi non è nemmeno continua e tantomeno differenziabile in $(0,0,0)$. La non limitatezza può essere vista in molti modi. Per esempio, fissato $\bar{z} \neq 0$, per $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y,\bar{z}) = \frac{\bar{z}^4}{x^2+y^2+\bar{z}^2}(x^2+y^2)^\alpha > \bar{z}^2(x^2+y^2)^\alpha$$

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \bar{z}^2(x^2+y^2)^\alpha = +\infty$.

Se $(\alpha = 0)$**:** $f(x,y,z) = \dfrac{z^4}{x^2+y^2+z^2}$ per $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Inoltre

$$f(x,0,0) = f(0,y,0) = f(0,0,z) \qquad \text{per ogni } x,y,z \in \mathbb{R},$$

quindi tutte le derivate parziali di f in $(0,0,0)$ esistono e sono nulle:

$$\partial_x f(0,0,0) = \partial_y f(0,0,0) = \partial_z f(0,0,0) = 0.$$

Quindi la condizione di differenziabilità in $(0,0,0)$, che per una generica funzione f è:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \partial_x f(0,0,0)x - \partial_y f(0,0,0)y - \partial_z f(0,0,0)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

si riduce a

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

cioè

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^4}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

e questo è sicuramente vero perché

$$\frac{z^4}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)} \frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} |z| \leq |z|.$$

Se $(\alpha > 0)$**:** si può ragionare in modo molto analogo al caso precedente. Ancora una volta tutte le derivate parziali di f in $(0,0,0)$ esistono e sono nulle:

$$\partial_x f(0,0,0) = \partial_y f(0,0,0) = \partial_z f(0,0,0) = 0$$

e la condizione di differenziabilità in $(0,0,0)$ ancora si riduce a

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

cioè, in questo caso a

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^4(x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

che è sicuramente vero, infatti, con una maggiorazione identica a quella usata nel caso precedente

$$\frac{z^4(x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le |z|(x^2+y^2)^\alpha \to 0$$

per $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

(Es 8): *Sia* $f(x,y,z) := \log \frac{xy}{z}$.
Trovate il dominio naturale di f*; calcolate* $\nabla f(3,2,2)$*; scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di* f *nel punto* $(3,2,2,f(3,2,2))$.

Soluzione: L'argomento del logaritmo dev'essere strettamente positivo e il denominatore non si può annullare; quindi il dominio naturale di f è dato dai punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $xyz > 0$.
Il gradiente di f in un generico punto (x,y,z) è:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z}\right)$$

In particolare nel punto $(3,2,2)$ il gradiente vale

$$\nabla f(3,2,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Se indichiamo con (x,y,z,w) i punti di $\mathbb{R}^4$, l'equazione del piano (iper-piano per precisione!) tangente al grafico di f nel punto $(3,2,2,f(3,2,2)) = (3,2,2,\log 3)$ è

$$w = f(3,2,2) + \langle \nabla f(3,2,2), (x-3, y-2, z-2)\rangle$$

cioè

$$w = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \log 3 - 1.$$

(Es 11): *Trovate il maggior numero di funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *differenziabili e tali che*

$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= 0\,, \\ D_x f(x,y) + D_y f(x,y) &= 0\,, \\ 2D_x f(x,y) + 3D_y f(x,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

(Soluzione): Risolviamo prima

$$D_x f(x,y) = 0\,,$$

siccome la derivata lungo la direzione x deve essere nulla ci aspettiamo che la funzione f sia costante lungo la direzione x, dunque f sarà della forma

$$f(x,y) = A + Bg(y)\,,$$

per opportune costanti A e B e per un'opportuna funzione g.

Consideriamo ora

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y) = 0. \tag{1}$$

Osserviamo che la condizione

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), (1,1) \rangle = 0$$

dice che $\nabla f(x,y)$ è, in ogni punto, ortogonale al vettore $(1,1)$.

Ipotizziamo dunque che f sia della seguente forma

$$f(x,y) = \varphi(z(x,y))\,, \quad z(x,y) = x - y\,, \tag{2}$$

per una funzione φ arbitraria purché derivabile. Applicando la regola della catena per la derivata otteniamo dunque che

$$D_x f(x,y) = D_x \varphi(z(x,y)) = \frac{d}{dz}\varphi(z) D_x z(x,y) = \frac{d}{dz}\varphi(z)\,,$$
$$D_y f(x,y) = D_y \varphi(z(x,y)) = \frac{d}{dz}\varphi(z) D_y z(x,y) = -\frac{d}{dz}\varphi(z)\,.$$

Sostituendo ora le derivate rispetto a z nell'equazione originale (1) otteniamo

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y) = \frac{d}{dz}\varphi(z) - \frac{d}{dz}\varphi(z) = 0\,,$$

e abbiamo dimostrato che f in (2) è soluzione di (1).

Consideriamo ora

$$D_x f(x,y) + \frac{3}{2} D_y f(x,y) = 0\,, \tag{3}$$

in maniera analoga a quanto fatto prima ipotizziamo che la funzione f sia della seguente forma

$$f(x,y) = \varphi(z(x,y))\,, \quad z(x,y) = x - \frac{2}{3}y\,, \tag{4}$$

per un'opportuna funzione φ. Applicando la regola della catena per la derivata otteniamo

$$D_x f(x,y) = D_x \varphi(z(x,y)) = \frac{d}{dz}\varphi(z) D_x z(x,y) = \frac{d}{dz}\varphi(z)\,,$$
$$D_y f(x,y) = D_y \varphi(z(x,y)) = \frac{d}{dz}\varphi(z) D_y z(x,y) = -\frac{2}{3}\frac{d}{dz}\varphi(z)\,.$$

Sostituendo ora le derivate rispetto a z nell'equazione (3) otteniamo

$$D_x f(x,y) + \frac{3}{2} D_y f(x,y) = \frac{d}{dz}\varphi(z) - \frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{d}{dz}\varphi(z) = 0\,,$$

e abbiamo dimostrato che f in (4) è soluzione di (3).