ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ALCUNE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DELLA SETTIMANA 2

(1) Dimostrate che se $x_1, \dots, x_n$ sono reali positivi allora

$$n\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)^{-1} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \tag{1}$$

(Una possibile soluzione:)

Utilizziamo la seguente disuguaglianza vista negli esercizi della settimana 1: se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono numeri positivi allora

$$a_1 \dots a_n = 1 \implies a_1+\cdots+a_n \geq n.$$

Denotiamo

$$a_1 := \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}, \quad a_2 := \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}, \quad \dots, \quad a_n := \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}.$$

Allora, $a_1 \dots a_n = 1$ e quindi

$$a_1+\cdots+a_n = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} \geq n$$

cioè

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} \geq n$$

e la disuguaglianza destra di (1) è dimostrata.

Per dimostrare la disuguaglianza sinistra, basta applicare la disuguaglianza di destra ai numeri $\frac{1}{x_i}$. Infatti:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

e anche il lato sinistro di (1) è dimostrato.

Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore

(1) Sia X un insieme *non vuoto* di numeri *non negativi* con le seguenti proprietà:
  (i) $s := \sup X < 1$
  (ii) se $x, y \in X$ e $x < y$ allora $\dfrac{x}{y} \in X$.
  (a) Dimostrate che $s = \max X$.
  (b) Fate un esempio di un insieme X che abbia le proprietà indicate.

(Una possibile soluzione:)

Mostriamo che se s non fosse un massimo allora otterremmo un assurdo. Infatti, se s non fosse un massimo, fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ esisterebbero (almeno) due punti $x, y \in X$ tali che

$$s-\varepsilon < x < y < s = \sup X < 1.$$

Allora, dovrebbero essere vere le seguenti disuguaglianze

$$1 - \frac{\varepsilon}{s} = \frac{s - \varepsilon}{s} < \frac{x}{y} < s.$$

Ma questa non può essere vera per un $\varepsilon > 0$ arbitrario, infatti, per un qualsiasi fissato $s < 1$ è certamente possibile scegliere un $\varepsilon > 0$ tale che

$$1 - \frac{\varepsilon}{s} > s.$$

Infine, fissato un qualsiasi $s \in (0, 1)$ (cioè s positivo e minore di 1) il seguente insieme

$$X := \{s^k : k \in \mathbb{N}^+\} \equiv \{s, s^2, s^3, \dots\}$$

è un esempio di insieme che verifica le proprietà (i) e (ii).