SETTIMANA 20 – ALCUNE SOLUZIONI

- *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*
$$f(x, y) := e^{x^2}(\alpha x - y^3).$$
Trovate α *in modo che*
(1) *la direzione di massima crescita in* $(0, 1)$ *sia lungo la tangente alla parabola di equazione* $y = (x + 1)^2$*;*
(2) *il piano tangente in* $(0, 1)$ *al grafico di* f *sia perpendicolare alla retta di equazioni* $3x = 2y = 6z$*.*

Una possibile soluzione:

(1): La direzione di massima crescita di una funzione in un punto (x, y) è la direzione del gradiente nel punto stesso. Calcoliamo quindi $\nabla f(0, 1)$, che è dipendente da α e poi scegliamo α in modo che abbia la stessa direzione della retta tangente alla parabola in $(0, 1)$.

In un generico punto (x, y)
$$\nabla f(x, y) = \left(e^{x^2}(2\alpha x + \alpha - 2xy^3), -3y^2 e^{x^2}\right)$$
e nel punto $(0, 1)$
$$\nabla f(0, 1) = (\alpha, -3).$$
Vogliamo trovare i valori α per cui il vettore $(\alpha, -3)$ è proporzionale al vettore associato alla retta tangente alla parabola in $(0, 1)$. Consideriamo quindi la parabola $y = x^2 + 2x + 1$ e cerchiamo un'espressione della retta tangente. La pendenza della retta si può ottenere calcolando la derivata per $x = 0$:
$$y'(x) = 2x + 2 \qquad y'(0) = 2$$
La retta tangente è della forma $y = 2x + q$ dove q si ottiene imponendo il passaggio della retta per il punto $(0, 1)$. In questo modo troviamo che l'equazione della retta tangente in $(0, 1)$ è
$$2x - y + 1 = 0.$$
Un vettore parallelo alla direzione della retta tangente è $(1, 2)$. Dal momento che vogliamo che questa sia la direzione di massima crescita, imponiamo che
$$(\alpha, -3) = \lambda(1, 2)$$
Osservando la seconda componente troviamo subito che $\lambda = -\frac{3}{2}$ e quindi $\alpha = -\frac{3}{2}$.

(2): Il piano tangente al grafico di f nel punto punto $(0, 1, f(0, 1))$ ha equazione
$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1)$$
Quindi
$$z = -1 + \alpha x - 3(y - 1) = \alpha x - 3y + 2$$
e un vettore ortogonale al piano tangente è il vettore $(\alpha, -3, -1)$.
Per esprimere la condizione di perpendicolarità fra piano e retta è comodo scrivere l'equazione della retta $3x = 2y = 6z$ in forma parametrica:
$$\{(x, y, z) : 3x = 2y = 6z\} = \{(2t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Il piano tangente è perpendicolare alla retta se un vettore perpendicolare al piano è proporzionale a un vettore parallelo alla retta, quindi, se esiste $\lambda \neq 0$ t.c.

$$(\alpha, -3, -1) = \lambda(2, 3, 1)$$

Guardando la seconda e la terza componente è immediato verificare che λ esiste e vale -1. Da questo segue che $\alpha = -2$.

- *Trovate i punti stazionari delle seguenti funzioni e studiatene la natura.*

Esempio 1:

$$f(x, y) := x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$$

Una possibile soluzione:

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2 + 6x + 4y$$
$$\partial_y f(x, y) = 4x + 2y.$$

I punti stazionari sono quelli per i quali $\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x + 4y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha le soluzioni: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2/3 \\ y = -4/3 \end{cases}$ e i punti stazionari sono $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$.

$$\partial^2_{x,x} f(x, y) = 6x + 6$$
$$\partial^2_{x,y} f(x, y) = 4 = \partial^2_{y,x} f(x, y)$$
$$\partial^2_{y,y} f(x, y) = 2$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 6x + 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolando $Hf(x, y)$ nei due punti stazionari otteniamo:

$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; il determinante è $\det Hf(P_1) = 12 - 16 = -4 < 0$. Gli autovalori di $Hf(P_1)$ hanno segno discorde, ne consegue che P_1 *è un punto di sella.*

$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; il determinante è $\det Hf(P_2) = 20 - 16 = 4 > 0$. Gli autovalori di $Hf(P_2)$ hanno segno concorde, quindi sono o entrambi positivi o entrambi negativi. La traccia di $Hf(P_2) = 12 > 0$ quindi gli autovalori possono essere solo entrambi positivi. Concludendo P_2 *è un punto di minimo locale.*

Esempio 2: Studiate, in funzione di $a \in \mathbb{R}$, i punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ di

$$f(x, y) := x^4 + ax^2y + y^2, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Una possibile soluzione:

$$\partial_x f(x, y) = 4x^3 + 2axy$$
$$\partial_y f(x, y) = ax^2 + 2y.$$

inoltre

$$\begin{aligned}
\partial^2_{x,x} f(x,y) &= 12x^2 + 2ay \\
\partial^2_{x,y} f(x,y) &= 2ax = \partial^2_{y,x} f(x,y) \\
\partial^2_{y,y} f(x,y) &= 2
\end{aligned}$$

La matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2ay, & 2ax \\ 2ax, & 2 \end{bmatrix}.$$

I punti stazionari sono quelli per i quali $\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 0$. Quindi sono le soluzioni del sistema

(1)
$$\begin{cases} 4x^3 + 2axy = 0 \\ ax^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dà una relazione fra le due variabili solo se $a \neq 0$. Distinguiamo quindi i due casi $a = 0$ e $a \neq 0$.

Se $a = 0$**:** il sistema si riduce a $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ che ha l'unica soluzione $x = y = 0$. Quindi, c'è il solo punto stazionario $P_0 := (0,0)$. $Hf(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzata, i suoi autovalori sono 0 e 2. Quindi è semidefinita positiva. Il teorema generale non è quindi conclusivo in questo caso, però basta osservare che, in questo caso, $f(x,y) := x^4 + y^2$. Quindi $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(x,y) = 0$ solo per $(x,y) = (0,0)$. Quindi $P_0 = (0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

Se $a \neq 0$**:** la seconda equazione del sistema (1) implica $y = -\frac{2}{a}x^2$ che sostituito nella prima equazione dà

$$2x^3\left(2 - \frac{a^2}{2}\right) = 0.$$

Se $a^2 = 4$ l'equazione è un'identità (cioè è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$). Esistono quindi infiniti punti stazionari $P_x = (x, -x^2)$ se $a = 2$ oppure $P_x = (x, x^2)$ se $a = -2$. Osserviamo che
se $a = 2$**:** $f(x,y) = x^4 + 2x^2y + y^2 = (x^2 + y)^2 \geq 0$ e $f(P_x) = f(x, -x^2) = 0$ quindi tutti i punti P_x sono di minimo assoluto per f.
se $a = -2$**:** $f(x,y) = x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2 - y)^2 \geq 0$ e $f(P_x) = f(x, x^2) = 0$ quindi tutti i punti P_x sono di minimo assoluto per f.

Se $a^2 \neq 4$ il sistema (1) ha l'unica soluzione $P_0 = (0,0)$. Anche in questo caso $Hf(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e i suoi autovalori sono 0 e 2. Quindi è semidefinita positiva. Il teorema generale non è conclusivo in questo caso e, per determinare la natura del punto stazionario P_0, è necessario studiare il segno di f in un intorno di $(0,0)$. A questo scopo osserviamo che

(2)
$$f(x,y) := x^4 + ax^2y + y^2 = \left(\frac{x^4}{y^2} + a\frac{x^2}{y} + 1\right) y^2$$

e che il trinomio $t^2 + at + 1 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $a^2 < 4$ perchè il discriminante è negativo. Quindi, se $a^2 < 4$ la quantità all'interno della parentesi in (2) è positiva per $(x,y) \neq (0,0)$. Ne consegue che $(0,0)$ è un punto di minimo.
Invece, se $a^2 > 4$, il trinomio $t^2 + at + 1$ cambia segno per $t \in \mathbb{R}$. Precisamente, $t^2 + at + 1 < 0$ per t compreso fra $\frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4})$ e $\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4})$. Quindi,

ricordando (2), $f(x,y)<0$ se $\frac{x^2}{y}$ è compreso fra $\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4})$ e $\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4})$. Questa è una regione compresa fra due parabole tangenti fra loro nell'origine.

Conclusione

Se $|a|<2$**:** l'origine $(0,0)$ è l'unico punto stazionario ed è un minimo assoluto.

Se $a=2$**:** i punti $(x,-x^2)$ per $x\in\mathbb{R}$ sono tutti punti stazionari e sono minimi assoluti.

Se $a=-2$**:** i punti (x,x^2) per $x\in\mathbb{R}$ sono tutti punti stazionari e sono minimi assoluti.

Se $|a|>2$**:** l'origine $(0,0)$ è l'unico punto stazionario ma non è né massimo né minimo perché f cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$.

- *Una funzione $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si dice si dice* armonica *in un aperto A se*

$$\Delta f(\mathbf{x}) := \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h^2}(\mathbf{x}) = 0$$

per ogni $\mathbf{x}\in A$. L'operatore differenziale $\Delta := \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_h^2}$ è detto operatore di Laplace.

(1) (Esercizio 2 pag 335): *Sia $n=2$, $A:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e $r: A\to\mathbb{R}$ definita da $r(x,y):=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolate per $(x,y)\in A$*

$$\Delta r, \qquad \Delta(r^2), \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

(2) *Nel caso generale $n\geq 2$ e $r(\mathbf{x}):=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ calcolate, per $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$,*

$$\Delta r, \qquad \Delta(r^2), \qquad \Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

(3) *Trovate il dominio naturale di f e verificate che è* armonica

$$f(x,y) := \arctan\frac{x+y}{x-y};$$

(4) *Trovate il dominio naturale di g e verificate che è* armonica

$$g(x,y) := \log(x^2+y^2).$$

(Soluzione):

(1): Calcoliamo

$$D_x\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad D_y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$D^2_{x,x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad D^2_{y,y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dunque

$$\Delta r(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r(x,y)}.$$

Svolgendo i conti fatti in precedenza per $r^2(x,y)=x^2+y^2$ otteniamo

$$D_x r^2(x,y) = 2x\,, \quad D_y r^2(x,y) = 2y\,, \quad D^2_{x,x}r^2 = D^2_{y,y}r^2 = 2\,,$$

da cui

$$\Delta r^2(x,y) = 4\,.$$

Infine

$$D_x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \quad D_y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$D^2_{x,x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$D^2_{y,y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{1}{(r(x,y))^3}\end{aligned}$$

(2): Calcoliamo prima di tutto

$$D_{x_h}r(\mathbf{x}) = \frac{x_h}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}\,,$$
$$D^2_{x_h,x_h}r(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2+\cdots+x_{h-1}^2+x_{h+1}^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

dunque segue dalla definizione di operatore di Laplace

$$\Delta r(\mathbf{x}) = \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}} = \frac{n-1}{r(\mathbf{x})}.$$

Svolgendo i conti fatti in precedenza per $r^2(\mathbf{x})$ otteniamo che

$$D_{x_h}r^2(\mathbf{x}) = 2x_h\,,\quad D^2_{x_h,x_h}r^2(\mathbf{x}) = 2\,,$$

da cui

$$\Delta r^2(\mathbf{x}) = 2n\,.$$

Infine abbiamo che

$$D_{x_h}\frac{1}{r(\mathbf{x})} = -\frac{x_h}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$D^2_{x_h,x_h}\frac{1}{r(\mathbf{x})} = \frac{3x_h^2}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{r(\mathbf{x})} &= \frac{3(x_1^2+\cdots+x_n^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{n}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{(3-n)(x_1^2+\cdots+x_n^2)}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{5}{2}}}\\ &= \frac{3-n}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{3-n}{(r(\mathbf{x}))^3}\end{aligned}$$

In particolare se $n=3$,

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \Delta\left(\frac{1}{r(x,y,z)}\right) = 0$$

(3): Il dominio naturale di $f(x,y) := \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$ è $D := \{(x,y) : x \neq y\}$.

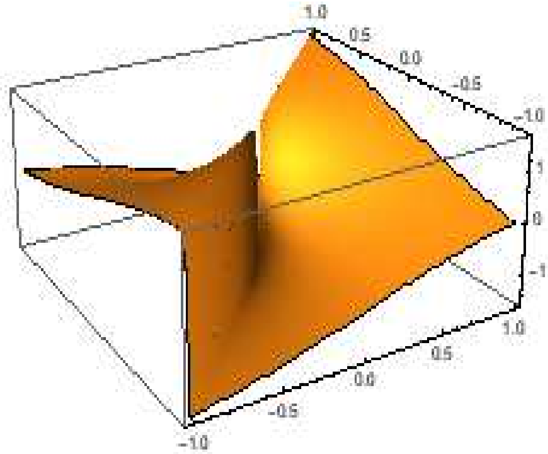

FIGURE 1. Grafico vicino all'origine di $f(x,y) := \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$. Nel disegno appare il comportamento della funzione vicino alla "linea di frattura" del grafico. La funzione si avvicina al valore $\pi/2$ da una parte e al valore $-\pi/2$ dall'altro lato.

f è armonica se $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$. Per $n = 2$ l'operatore di Laplace si riduce a:

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Le derivate parziali prime sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Quindi f è una funzione armonica.

(4): Consideriamo ora $g(x,y) := \log(x^2+y^2)$.
Procedendo come nel caso precedente, calcoliamo le derivate prime :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Adesso calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Calcolando l'operatore Laplaciano per g troviamo

$$\Delta g(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

L'operatore Laplaciano di g è zero: la funzione g è armonica.