

1a. (4 punti) Calcolate la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{e^y + e^{-y}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1b. (3 punti) Calcolate
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{\cos^2 x + 2 \cos x - 3} dx$$

2a. (3 punti) Siano $a \in \mathbf{R}$ e $f = f_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) := \begin{cases} 2^x & x < a \\ xe^{-x} & a \leq x \end{cases}$. Per quali valori del parametro a la funzione f ha un punto di massimo relativo in \mathbf{R} . (*Disegnate approssimativamente i grafici per motivare la vostra risposta*)

2b. (4 punti) Sia $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $g(x) := \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 15x & 0 \leq x \leq 3 \\ 9e^{3-x} & 3 < x \end{cases}$. Trovate i punti di massimo/minimo assoluti e relativi di g e disegnate approssimativamente il grafico di g .

3a. (4 punti) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Definite che cosa si intende dicendo: che f è *iniettiva*, che f è *suriettiva* e che f è *biunivoca*.
Spiegate che cosa si intende per *funzione inversa* f^{-1} di f e in quali ipotesi la funzione inversa f^{-1} esiste.

3b. (4 punti) Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sinh x) \cosh x}{x^3}$.