1) Numeriamo le carte per comodità da 1 a 52; Sia X_1 la variabile casuale che vale 1 se si realizza la coppia 1-1 (con probabilità $\frac{1}{52}$ — una solo caso su 52) e vale 0 se non si realizza la coppia 1-1. Risulta che $\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{52} + 0(1 - \frac{1}{52}) = \frac{1}{52}$. Introduciamo allo stesso modo le variabili X_2, X_3, $\ldots$,X_{52}. La somma $X_1 + X_2 + \cdots + X_{52}$ dà il numero di accoppiamenti: quindi il valore di aspettazione di questa somma è la somma dei valori di aspettazione, cioè $52 \times \frac{1}{52} = 1$ (!) — Osservazione: è sempre 1 qualsiasi sia il numero delle carte ...

2) La probabilità è $\frac{5}{12}$: infatti affinché i tre spettatori non abbiano vicini deve risultare k_1 poltrone vuote a sinistra del primo spettatore S_1, $k_2 + 1$ poltrone vuote tra il primo e il secondo spettatore S_2, $k_3 + 1$ poltrone vuote a destra del secondo spettatore S_2 ed il terzo spettatore ed infine k_4 poltrone vuote a destra del tezo spettatore. In totale $k_1+k_2+k_3+k_4 = 9-(1+3+1) = 4$, dove ogni k_i può variare tra 0 e 4. Si tratta in fondo di disporre 4 poltrone in 4 “scatole", cioè i 4 spazi: uno a sinistra del primo spettatore, un secondo tra il primo ed il secondo spettatore, un terzo tra il secondo ed il terzo e un quarto a destra del terzo: in altre parole le combinazioni con ripetizione $C'_{4,4} = 35$. la probabilità si ottiene dividendo per il numero dei modi di disporsi 3 spettatori in 9 poltrone$= C_{9,3} = 84$.

3) Si tratta semplicemente di calcolare

$$\mathbb{E}(x_1) = \frac{1}{2}\Big(a - \int_0^{\frac{a^2}{4}} \sqrt{a^2 - 4x}\, \frac{dx}{a^2/4}\Big) = \frac{1}{2}\Big(a - |a| \int_0^1 \sqrt{1-y}\, dy\Big) = \frac{1}{2}\Big(a - \tfrac{2}{3}\,|a|\Big)$$

Infine $\mathbb{E}(x_2) = a - \mathbb{E}(x_1) = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{2}{3}\,|a|\Big)$

4) La probabilità di avere k numeri dispari tra i primi 20 è

$$\frac{\binom{50}{k}\binom{50}{20-k}}{\binom{100}{20}}$$

5) Il valor medio del'arco è π. Siano P_1, P_2 e P_3 i tre punti scelti indipendentemente ed uniformemente sulla circonferenza: denotiamo con X_1 la lunghezza dell'arco che unisce il punto (1,0) con P_1 in senso antiorario, con X_2 la lunghezza dell'arco che unisce il punto (1,0) con P_2 e con X_3 la lunghezza dell'arco che unisce il punto (1,0) con P_3. Per ipotesi le tre variabili casuali X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti ed uniformemente distribuite in $0, 2\pi$. La lunghezza dell'arco considerato nell'esercizio è data da

$$\min\{X_1, X_2, X_3\} + 2\pi - \max\{X_1, X_2, X_3\}$$

L'esercizio si riduce al calcolo dei valori di aspettazione di $\min\{X_1, X_2, X_3\}$ e $\max\{X_1, X_2, X_3\}$.