Siano dati due processi stocastici X_t e M_t. Supponiamo inoltre che il processo X_t abbia traiettorie *derivabili, con derivata in* $L^1(0,T)$, e che il processo M_t abbia traiettorie *continue*. Ebbene esiste l'integrale (alla Stieltjes) del processo X_t rispetto al processo M_t (traiettoria per traiettoria) ed è

$$\int_s^t X_r\, dM_r = X_t\, M_t - X_s\, M_s - \int_s^t M_r\, \dot{X}_r\, dr$$

che si può scrivere in modo più conveniente così

$$\boxed{\int_s^t X_r\, dM_r = X_s\,(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\, \dot{X}_r\, dr}$$

Sia data una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}$ ed una martingala (rispetto a questa filtrazione) M_t con traiettorie continue. Denotiamo con A_t è la variazione quadratica di M_t cioè

$$\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \underset{\mathbb{P}}{\to} A_t$$

quando la partizione $\pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ tende all'infinito, e che spesso si denota anche con $\langle M \rangle_t$ (il *crochet di P.A. Meyer*). Si ha anche che

$$M_t^2 - A_t \quad \text{è una martingala}$$

Risulta facilmente che

$$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = A_t - A_s.$$

Supponiamo inoltre che X_t sia progressivamente misurabile (rispetto alla filtrazione data) e tale che $(t,\omega) \to \dot{X}_t(\omega) \in L^2([0,T] \times \Omega, dA_t \otimes d\mathbb{P})$, cioè

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T X_t^2\, dA_t \Big) < \infty$$

Teorema 1 *Risulta che*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t X_r\, dM_r \Big) = 0 \tag{1}$$

e

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\, dM_r \Big)^2 \Big] = \mathbb{E} \int_0^t X_r^2\, dA_r. \tag{2}$$

Inoltre

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t X_r\,dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) = \int_0^s X_r\,dM_r \tag{3}$$

e

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t X_r\,dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_s^t X_r^2\,dA_r \mid \mathcal{F}_s\Big]. \tag{4}$$

Dimostrazione. La (1) è facile. Per la (2) consideriamo

$$\Big(X_0\,(M_t - M_0) + \int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr\Big)^2 =$$

$$X_0^2\,(M_t - M_0)^2 + 2X_0\,(M_t - M_0)\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\,dr + \int_0^t \int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\,d\rho$$

dove il secondo addendo è conveniente riscriverlo come

$$X_0\,(M_t{-}M_0)\int_0^t (M_t{-}M_r)\,\dot{X}_r\,dr = X_0\,\Big[\int_0^t (M_t{-}M_r)^2\,\dot{X}_r\,dr{+}\int_0^t (M_r{-}M_0)\,(M_t{-}M_r)\,\dot{X}_r\,dr\Big]$$

il cui valore di aspettazione risulta

$$\mathbb{E}\big[X_0\int_0^t (A_t - A_r)\,\dot{X}_r\,dr\big] = \mathbb{E}\big[-A_t\,X_0^2 + X_0\int_0^t X_r\,dA_r\big]$$

Il valore di aspettazione del primo più il secondo termine è quindi

$$\mathbb{E}(A_t\,X_0^2){+}2\,\mathbb{E}\big[{-}A_t\,X_0^2{+}X_0\int_0^t X_r\,dA_r\big] = \mathbb{E}[-A_t\,X_0^2{+}2X_0\int_0^t X_r\,dA_r] = \mathbb{E}[\int_0^t X_r^2\,dA_r{-}\int_0^t (X_r{-}X_0)^2\,dA_r]$$

D'altra parte conviene riscrivere l'ultimo addendo (supponendo $r < \rho$)

$$(M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho = \dot{X}_r(M_t - M_\rho)^2\,\dot{X}_\rho + (M_\rho - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho$$

da cui il valore di aspettazione risulta

$$\mathbb{E}(\dot{X}_r\,\dot{X}_\rho(A_t - A_\rho))$$

e quindi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^t (M_t{-}M_r)\,\dot{X}_r(M_t{-}M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\,d\rho\right] = 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t d\rho\int_0^\rho (M_t{-}M_r)\,\dot{X}_r(M_t{-}M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r(M_t - M_\rho)\,\dot{X}_\rho\,dr\,d\rho\right] = 2\int_0^t d\rho\int_0^\rho \mathbb{E}(\dot{X}_r\,\dot{X}_\rho(A_t - A_\rho))\,dr$$

$$= 2\mathbb{E}\int_0^t (A_t{-}A_\rho)\,\dot{X}_\rho d\rho\int_0^\rho \dot{X}_r\,dr = 2\mathbb{E}\int_0^t (A_t{-}A_\rho)\,\dot{X}_\rho(X_\rho{-}X_0)d\rho = \mathbb{E}\int_0^t (A_t{-}A_\rho)\,\frac{d}{d\rho}(X_\rho{-}X_0)^2 d\rho$$

$$= \mathbb{E}\int_0^t (X_\rho - X_0)^2 dA_\rho$$

Sommando otteniamo

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\, dM_r\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\int_0^t X_r^2\, dA_r.$$

In quanto alla (3), dalla

$$\boxed{\int_s^t X_r\, dM_r = X_s(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\, dr}$$

otteniamo

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t X_r\, dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_s^t X_r\, dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) + \int_0^s X_r\, dM_r$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\int_s^t X_r\, dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}\Big(X_s(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\, dr \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= X_s\mathbb{E}(M_t - M_s) + \mathbb{E}\Big(\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\, dr \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= 0 + \int_s^t \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big((M_t - M_r)\,\dot{X}_r \mid \mathcal{F}_r\big) \mid \mathcal{F}_s\Big)\, dr \\
&= \int_s^t \mathbb{E}\Big(X_r\mathbb{E}(M_t - M_r) \mid \mathcal{F}_s\Big)\, dr = 0
\end{aligned}$$

Infine per dimostrare la (4) si procede come per dimostrare la (2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\, dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big] &= (\int_0^s X_r\, dM_r)^2 + 2\int_0^s X_r\, dM_r\ \mathbb{E}\Big[\int_s^t X_r\, dM_r \mid \mathcal{F}_s\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t X_r\, dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big] \\
&= (\int_0^s X_r\, dM_r)^2 + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t X_r\, dM_r\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big]
\end{aligned}$$

perché il termine medio è nullo per la terza formula. Calcoliamo l'ultimo addendo:

$$\Big(X_s(M_t - M_s) + \int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\, dr\Big)^2 =$$

$$X_s^2(M_t - M_s)^2 + 2X_s(M_t - M_s)\cdot\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\, dr + \Big(\int_s^t (M_t - M_r)\,\dot{X}_r\, dr\Big)^2$$

Abbiamo tre termini. Per il primo

$$\mathbb{E}(X_s^2(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) = X_s^2\,\mathbb{E}(A_t - A_s \mid \mathcal{F}_s)$$

Per il secondo

$$X_s(M_t-M_s)\cdot\int_s^t (M_t-M_r)\,\dot X_r\,dr = X_s\int_s^t (M_t-M_r)^2\,\dot X_r\,dr + X_s\int_s^t (M_r-M_s)(M_t-M_r)\,\dot X_r\,dr$$

$$\int_s^t (A_t-A_r)\,\dot X_r\,dr = -(A_t-A_s)X_s + \int_s^t X_r\,dA_r$$

e quindi sommando i primi due termini abbiamo

$$\mathbb{E}\Big[X_s^2(M_t-M_s)^2 + 2X_s(M_t-M_s)\cdot\int_s^t (M_t-M_r)\,\dot X_r\,dr \mid \mathcal{F}_s\Big] =$$

$$= -E(A_t-A_s\mid\mathcal{F}_s)X_s^2 + 2X_s\int_s^t \mathbb{E}(X_r\mid\mathcal{F}_s)\,dA_r = \int_s^t \mathbb{E}((2X_sX_r - X_s^2)\mid\mathcal{F}_s)\,dA_r$$

$$= \int_s^t \mathbb{E}(X_r^2\mid\mathcal{F}_s)\,dA_r - \int_s^t \mathbb{E}((X_r-X_s)^2\mid\mathcal{F}_s)\,dA_r$$

Infine per l'ultimo termine

$$\Big(\int_s^t (M_t-M_r)\,\dot X_r\,dr\Big)^2 = 2\int_s^t d\rho\int_s^\rho (M_t-M_r)\,\dot X_r(M_t-M_\rho)\,\dot X_\rho\,dr$$

$$\mathbb{E}(\dot X_r\,\dot X_\rho(A_t-A_\rho)\mid\mathcal{F}_s)$$

$$\mathbb{E}\Big(\Big(\int_s^t (M_t-M_r)\,\dot X_r\,dr\Big)^2\mid\mathcal{F}_s\Big) = 2\int_s^t d\rho\int_s^\rho \mathbb{E}(\dot X_r\,\dot X_\rho(A_t-A_\rho)\mid\mathcal{F}_s)\,dr$$

$$= \mathbb{E}\Big(\int_s^t (X_\rho-X_s)^2\,dA_\rho\mid\mathcal{F}_s\Big)$$

Il teorema 1 è dimostrato.

La (3) ci dice che l'integrale stocastico è anch'esso una martingala. Inoltre abbiamo

$$\boxed{\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^t X_r^2\,dA_r\mid\mathcal{F}_s\Big] = \Big(\int_0^s X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^s X_r^2\,dA_r}$$

Infatti

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^t X_r^2\,dA_r\mid\mathcal{F}_s\Big] = \Big(\int_0^s X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^s X_r^2\,dA_r$$

$$+\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t X_r\,dM_r\Big)^2 + 2\int_0^s X_r\,dM_r\int_s^t X_r\,dM_r - \int_s^t X_r^2\,dA_r\mid\mathcal{F}_s\Big]$$

$$= \Big(\int_0^s X_r\,dM_r\Big)^2 - \int_0^s X_r^2\,dA_r$$

In altre parole la variazione quadratica associata all'integrale stocastico è

$$\Big\langle\int_0^t X_r\,dM_r\Big\rangle_t = \int_0^t X_r^2\,dA_r$$