

**Diario del corso di Analisi Matematica 1**  
**(a.a. 2016/17)**

- 16 settembre 2016 (2 ore)  
Presentazione del corso. Numeri naturali, interi, razionali, reali.  $\sqrt{2}$  non è razionale. Come si risolve  $x^2 + 1 = 0$ ?
- 19 settembre 2016 (1 ora)  
Funzioni di variabile reale a valori reali. Potenze ad esponente intero positivo, polinomi. L'approssimazione polinomiale è efficace.
- 20 settembre 2016 (2 ore)  
Funzioni razionali, radici, potenze ad esponente razionale positivo.  $x^0 = 1$ . Potenze ad esponente razionale (di segno qualsiasi). Potenze ad esponente reale, esponenziali. Funzione distanza dall'origine (modulo).
- 21 settembre 2016 (2 ore)  
Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente). Composizione di funzioni. Funzione inversa. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive (biunivoche). Funzioni elementari inverse: radici, logaritmi, arcoseno.
- 22 settembre 2016 (2 ore)  
Funzioni elementari inverse: arcocoseno, arcotangente. Funzioni periodiche, pari, dispari, monotone, limitate. Numeri complessi: forma algebrica. Rappresentazione nel piano. Somma, prodotto, rapporto. Parte reale e parte immaginaria, coniugato, modulo. Forma trigonometrica di un numero complesso.
- 26 settembre 2016 (1 ora)  
Prodotto e potenze in forma trigonometrica. Formula di Eulero:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Forma esponenziale di un numero complesso. Potenze e radici  $k$ -esime. Esempi.
- 29 settembre 2016 (2 ore)  
Esercizi sui numeri complessi. Limiti: motivazioni del concetto e costruzione "intuitiva" della definizione.
- 30 settembre 2016 (2 ore)  
Limiti: definizioni formali. Proprietà (somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto). Estensione dell'algebra dei limiti ai casi non coperti dalla teoria standard (funzioni che tendono all'infinito): esempi ed esercizi. Forme indeterminate:  $+\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ . Esempi ed esercizi sulle forme indeterminate (funzioni razionali).
- 4 ottobre 2016 (1 ora)  
Limiti: unicità, eventuale non esistenza. Successioni: definizione. Successioni e funzioni limitate, limitate superiormente, limitate inferiormente. Massimo e minimo. Maggioranti e minoranti. Il minimo dei maggioranti esiste sempre: estremo superiore. Il massimo dei minoranti esiste sempre: estremo inferiore.

- 5 ottobre 2016 (2 ore)  
Le successioni monotone o convergono o divergono. Teorema di compressione (o “dei due carabinieri”). Il numero  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Limite per  $x \rightarrow 0$  di  $\frac{e^x - 1}{x}$  (e analogo in base  $A$ ),  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ . Esempi ed esercizi.
- 6 ottobre 2016 (2 ore)  
Limite per  $x \rightarrow 0$  di  $\frac{\log(1+x)}{x}$ ,  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ ,  $\frac{\arcsin x}{x}$ . Gerarchie di infinitesimi ed infiniti. Esempi ed esercizi.
- 7 ottobre 2016 (2 ore)  
Logaritmi e regolo calcolatore. Successione (funzione) limitata per successione (funzione) infinitesima è infinitesima. Successione (funzione) convergente è limitata (localmente limitata). Teoremi della permanenza del segno e osservazioni al riguardo. Funzioni continue: definizione. Esempi di discontinuità: salto, eliminabile, oscillazioni non smorzate “impacchettate” in un intervallo di lunghezza arbitrariamente piccola.
- 10 ottobre 2016 (2 ore)  
Proprietà delle funzioni continue: somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto, composizione. Inversa di funzione continua su un intervallo è continua. Esercizi sulla continuità. Teorema di esistenza degli zeri: metodo di bisezione. Varianti del teorema.
- 11 ottobre 2016 (2 ore)  
Teorema dei valori intermedi. Metodo di bisezione come metodo di approssimazione. Esempi ed esercizi. Teorema di Weierstrass: enunciato ed osservazioni sulle ipotesi. Teorema di Bolzano-Weierstrass.
- 12 ottobre 2016 (2 ore)  
Teorema di Weierstrass, con varianti. Derivata: definizione. Retta tangente come limite di rette secanti e come retta di migliore approssimazione. Differenziabilità: definizione.
- 13 ottobre 2016 (2 ore)  
Derivabilità e differenziabilità sono equivalenti. Regole di derivazione: somma, prodotto per costanti, prodotto, reciproco, rapporto. Derivata di  $x^k$  ( $k \geq 0$ );  $e^x$ ;  $A^x$ . Derivata di funzione composta. Derivata della funzione inversa.
- 14 ottobre 2016 (2 ore)  
Derivata di  $\log x$ ;  $x^r$  ( $r \in \mathbf{R}, x > 0$ );  $\sin x$ ;  $\cos x$ ;  $\operatorname{tg} x$ ;  $\arcsin x$ ;  $\arccos x$ ;  $\operatorname{arctg} x$ . Esercizi di derivazione. Funzioni iperboliche:  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ .
- 21 ottobre 2016 (2 ore)  
Metodo di Newton. Metodo di Erone. Massimi e minimi relativi ed assoluti: generalità. Teorema di Fermat. Esempi ed esercizi. Se  $f$  è derivabile e crescente, allora  $f' \geq 0$ . Teorema di Lagrange: enunciato.
- 25 ottobre 2016 (1 ora)  
Teorema di Lagrange: dimostrazione. Esempi. Teoremi di Rolle e di Cauchy.
- 26 ottobre 2016 (2 ore)  
Se  $f$  è definita in un intervallo ed è derivabile con  $f' \geq 0$  (rispettivamente,  $f' > 0$ ), allora  $f$  è crescente (rispettivamente, strettamente crescente). Se  $f$  è definita in un

intervallo ed è derivabile con  $f' = 0$ , allora  $f$  è costante. Regola di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.

- 27 ottobre 2016 (2 ore)  
Asintoti obliqui. Esempi ed esercizi. Convessità e concavità: definizione. Caratterizzazione con segno di  $f''$ . Punti di flesso. Azzeramento di  $f''$  nei punti di flesso. Esempi.
- 28 ottobre 2016 (2 ore)  
Derivabilità come limite di derivate. Segno di  $f''$  e punti di massimo e minimo relativo. Convessità e retta tangente. Studio di grafici. Esempi ed esercizi.
- 8 novembre 2016 (1 ora)  
Approssimazione polinomiale: derivazione del polinomio approssimante. Formula di Taylor con resto di Peano. Esempi.
- 9 novembre 2016 (2 ore)  
Sviluppo di  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ; cenni allo sviluppo di  $\frac{1}{1+x^2}$ ,  $\arctg x$ . Esempi ed esercizi.
- 10 novembre 2016 (2 ore)  
Infinitesimi di ordine superiore  $o(x^k)$  e loro proprietà. Polinomio di Taylor come unico polinomio che coincide con la funzione fino alla derivata  $N$ -esima. Esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor. Formula di Taylor con resto di Lagrange.
- 11 novembre 2016 (2 ore)  
Controllo dell'errore in funzione di  $N$ . Sviluppo in grande di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$  (per  $-1 < x \leq 1$ ). Calcolo approssimato di  $\cos \frac{1}{2}$ . Figure sull'approssimazione di Taylor. Serie numeriche: introduzione. Achille e la tartaruga.
- 15 novembre 2016 (2 ore)  
Serie numeriche: definizione di convergenza, divergenza, indeterminazione. Serie di Taylor di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$  (per  $-1 < x \leq 1$ ). Serie geometriche. Serie telescopiche. Serie di Mengoli. Esempi ed esercizi. Condizione necessaria per la convergenza. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  è divergente.
- 16 novembre 2016 (2 ore)  
Numeri periodici come numeri razionali. Le serie a termini positivi o convergono o divergono positivamente. Criterio di confronto e di confronto asintotico. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  è convergente. Esempi ed esercizi.
- 17 novembre 2016 (2 ore)  
Due parentesi: un paio di esercizi sugli sviluppi di Taylor di funzioni composte, e una breve discussione sul significato di  $O(x^k)$ . Criteri del rapporto e della radice. Criterio di convergenza assoluta. Esempi ed esercizi.
- 18 novembre 2016 (2 ore)  
Criterio di Leibniz. Serie di potenze (anche in campo complesso). Raggio di convergenza e suo calcolo. Serie di Taylor: rivisitazione per  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ . Formula di Eulero.

- 22 novembre 2016 (1 ora)  
Derivazione ed antiderivazione termine a termine. Esempio di funzione  $C^\infty$  che non coincide con la sua serie di Taylor. La funzione di Weierstrass, continua e mai derivabile: definizione.
- 23 novembre 2016 (2 ore)  
La funzione di Weierstrass, continua e mai derivabile: osservazioni e immagini. Esercizi su derivazione ed antiderivazione termine a termine per serie di potenze. Il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$ . La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|^n}{n}$ . La funzione zeta di Riemann. Integrali: definizione come limite di somme di Cauchy–Riemann (limite di somme di aree di rettangoli approssimanti).
- 24 novembre 2016 (2 ore)  
Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni monotone sono integrabili. Esempio di funzione non integrabile. Proprietà dell'integrale: linearità, positività, monotonia, additività. Calcolo dell'integrale di  $x$  e di  $x^2$  con le somme di Cauchy–Riemann (esempio di Gauss). Versione intuitiva del teorema fondamentale del calcolo.
- 25 novembre 2016 (2 ore)  
Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Esempi ed esercizi di integrazione diretta. Integrazione per parti: formula ed esempi.
- 29 novembre 2016 (2 ore)  
Integrazione per cambiamento di variabile. Esercizi di integrazione per parti e per cambiamento di variabile. Integrale di  $\sqrt{a^2 - x^2}$ : area del cerchio. Integrale di  $\sqrt{a^2 + x^2}$  e di  $\sqrt{x^2 - a^2}$ .
- 30 novembre 2016 (2 ore)  
Integrali razionali con denominatore di secondo grado. Divisione di polinomi. Esempi ed esercizi.
- 1 dicembre 2016 (2 ore)  
Cambiamento di variabile  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  (cioè  $t = \tan \frac{x}{2}$ ). Volume di solidi di rotazione, principio di Cavalieri. Volume della sfera. Volume della piramide. Volume di un cono generico. Volume del toro.
- 2 dicembre 2016 (2 ore)  
Lunghezza di grafici, aree di superfici di rotazione. Area della superficie della sfera. Legge della quarta potenza in idraulica. Serie di Fourier: generalità.
- 6 dicembre 2016 (1 ora)  
Serie di Fourier: calcolo dei coefficienti per periodo  $2\pi$  e per periodo  $T > 0$ . Serie di Fourier di soli seni per funzioni dispari e serie di Fourier di soli coseni per funzioni pari.
- 7 dicembre 2016 (2 ore)  
Serie di Fourier: risultato di convergenza. Serie di Fourier per funzioni prolungate periodiche, prolungate pari o prolungate dispari. Esercizi: calcolo esplicito di alcuni coefficienti di Fourier.

- 13 dicembre 2016 (2 ore)  
Integrali impropri: generalità. Integrali impropri all'infinito: definizione. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi. Integrabilità all'infinito di  $x^{-\alpha}$  per  $\alpha > 1$ . Integrabilità all'infinito di  $\frac{\sin x}{x}$ . Non integrabilità all'infinito di  $\frac{|\sin x|}{x}$ . Criterio di convergenza integrale per le serie.
- 14 dicembre 2016 (2 ore)  
Convergenza di  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  per  $1 < \alpha < 2$ . Integrali impropri al finito. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi ed esercizi. La funzione  $\Gamma(x)$ . Integrale di  $e^{-x^2}$  sulla retta reale.
- 15 dicembre 2016 (2 ore)  
Equazioni differenziali: generalità. Ordine, linearità. Esempi. Non unicità della soluzione. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali nonlineari del primo ordine a variabili separabili.
- 16 dicembre 2016 (2 ore)  
Esempi ed esercizi sulle equazioni nonlineari del primo ordine a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee e non-omogenee. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Caso omogeneo: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Caso non-omogeneo: determinazione della soluzione particolare (metodo di variazione della costante arbitraria).
- 20 dicembre 2016 (1 ora)  
Caso non-omogeneo: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Esempi ed esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Soluzione generale dell'equazione omogenea: polinomio associato.
- 21 dicembre 2016 (2 ore)  
Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee. Metodo di variazione delle costanti (cenni). Metodo di somiglianza (esponenziali, seni/coseni, polinomi). Esempi ed esercizi.