

## ESERCITAZIONE DI MARTEDÌ 13/10/2015

Gruppo A-L

*Continuità:* teorema di Weierstrass ed applicazioni.

*Derivabilità:* derivata di  $x^k$  con  $k \in \mathbb{N}$  e derivata di  $\sqrt{x}$  vista come funzione esponenziale, derivate di funzioni polinomiali, studio della derivabilità di una funzione.

**Esercizio 1.** Trovare  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$  in modo tale che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-1 + \epsilon, 1]$  per la seguente funzione:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(2x)+1-\cos(x^2)}{e^{x^2}-1+x^2+x^3} & \text{se } x > 0; \\ \log_\alpha\left(\pi + \frac{x}{\beta}\right) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

con  $\epsilon > 0$ .

**Esercizio 2.** Studiare se esiste almeno una soluzione per l'equazione:

$$x = \cos x.$$

In caso affermativo, quante soluzioni ammette?

**Esercizio 3.** L'equazione  $xe^x = 10$  ammette soluzioni reali? In caso affermativo, quante soluzioni ammette?

**Esercizio 4.** La funzione  $g(x) = e^x - \sin x - 3x$  ammette zeri reali?

**Esercizio 5.** Per quale funzione  $f$  l'equazione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  è certamente risolubile in  $[0, \frac{\pi}{3}]$ ?

(a)  $f(x) = \cos x + 2$ ;

(b)  $f(x) = -x - \frac{1}{2}$ ;

(c)  $f(x) = 3x - 1$ ;

(d)  $f(x) = x^2 + 1$ .

**Esercizio 6.** Dimostrare che ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ammette almeno una radice (Breve commento; risoluzione lasciata allo studente).

**Esercizio 7.** Derivare la funzione  $f(x) = 4x^5 - 2\sqrt{x} + 2$ .

**Esercizio 8.** Stabilire per quali valori  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  la seguente funzione è continua e derivabile:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & \text{se } x < 1; \\ 2\beta x^2 - \alpha x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$