La serie binomiale

Per $\alpha \in \mathbf{N}$ e $k \in \mathbf{N}$, $\alpha \geq k$, i coefficienti binomiali si definiscono come

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}\,,$$

cioè, in altri termini, $\displaystyle\binom{\alpha}{0} = \frac{\alpha!}{0!\,\alpha!} = 1$ e per $k \geq 1$, semplificando i fattori comuni,

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)(\alpha-k-1)\cdots 1}{k!(\alpha-k)!}\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,.\end{aligned}$$

In modo analogo, per $\alpha \in \mathbf{R}$ e $k \in \mathbf{N}$ i coefficienti binomiali generalizzati si definiscono come

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{per } k \geq 1\,.$$

[Come appena detto, da questa definizione si ha subito che se $\alpha \in \mathbf{N}$ e $\alpha \geq k$ le due definizioni coincidono. Se invece $\alpha \in \mathbf{N}$ e $k \geq \alpha+1$ si ha che i coefficienti binomiali generalizzati si annullano: $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = 0$. Infatti al numeratore si hanno tutti i fattori che si ottengono partendo da α e sottraendo 1, fino a giungere a $\alpha-(k-1)$, per cui, se $\alpha \in \mathbf{N}$ e $\alpha \leq k-1$, uno di questi fattori diventa $\alpha-\alpha$ e dunque è nullo.]

Vogliamo studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

e determinare qual è la sua somma. [Si noti che, per quanto appena detto, se $\alpha \in \mathbf{N}$ questa non è una serie, ma un polinomio di grado α, e rappresenta lo sviluppo del binomio $(1+x)^\alpha$: il cosiddetto "binomio di Newton".]

Calcoliamo il raggio di convergenza: si ha

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{k+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha-k|}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k-\alpha}{k+1} = 1\,,$$

dunque la serie converge per $|x| < 1$.

Definiamo $\displaystyle g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ per $|x| < 1$. Siccome quando $\alpha \in \mathbf{N}$ si ha

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha\,,$$

un'ipotesi di lavoro ragionevole è che valga $g(x) = (1+x)^\alpha$ anche per qualsiasi $\alpha \in \mathbf{R}$.

Per verificarlo, per prima cosa osserviamo che $g(0) = \binom{\alpha}{0} = 1$, per cui l'uguaglianza è vera per $x = 0$. Verifichiamo ora che la derivata del rapporto $\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$ è nulla, per cui questo rapporto è costante, e quindi costantemente uguale a 1 (essendo uguale a 1 per $x = 0$): si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} &= \frac{g'(x)(1+x)^\alpha - g(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\
&= \frac{(1+x)^{\alpha-1}[g'(x)(1+x) - g(x)\alpha]}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{g'(x)(1+x) - g(x)\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Calcoliamo $g'(x)$: derivando termine a termine si ottiene

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} kx^{k-1}\,,$$

dunque

$$(1+x)g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} kx^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} kx^{k}\,.$$

Scrivendo $m = k-1$, la prima serie diventa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} kx^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m+1} (m+1)x^m\,.$$

Nella seconda serie invece si può aggiungere il termine per $k = 0$, che ha valore 0, per cui, scrivendo per uniformità di notazione m al posto di k, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} kx^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} mx^m\,.$$

Dunque abbiamo ottenuto

$$(1+x)g'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{m+1}(m+1) + \binom{\alpha}{m} m\right] x^m\,.$$

Si tratta ora di sommare $\binom{\alpha}{m+1}(m+1)$ e $\binom{\alpha}{m} m$: si ha

$$
\begin{aligned}
&\binom{\alpha}{m+1}(m+1) + \binom{\alpha}{m} m \\
&\quad = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)(\alpha-m)}{(m+1)!}(m+1) + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} m \\
&\quad = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}(\alpha - m + m) = \binom{\alpha}{m}\alpha\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione

$$(1+x)g'(x) = \alpha g(x)\,, \tag{2}$$

e quindi in (1) abbiamo ottenuto che la derivata di $\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$ è nulla.

Dunque per $|x| < 1$ si conclude che $g(x) = (1+x)^\alpha$; in altri termini, si è ottenuto lo sviluppo in serie del binomio, dovuto a Newton:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad , \quad |x| < 1\,. \tag{3}$$

Un caso interessante è quello per $\alpha = -1/2$, con $x = -t^2$. Ne viene, per $|t| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k t^{2k}$$

e, ricordando che $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ è la derivata di $\arcsin t$, antiderivando termine a termine si ottiene

$$\arcsin t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1} + \mathrm{cost}\,.$$

Siccome per $t = 0$ si ha $\arcsin 0 = 0$ e inoltre anche la serie di potenze a destra vale 0, ne segue che la costante è nulla, cioè

$$\arcsin t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1} \quad , \quad |t| < 1\,. \tag{4}$$