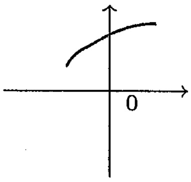
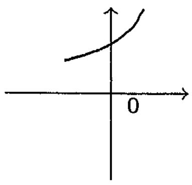
| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | 11 luglio 2011 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 \| |

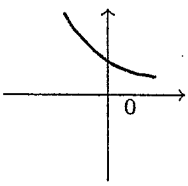
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

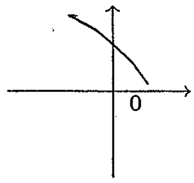
1. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n+2^{-n}}$; $\boxtimes$ $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^2}}$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{e^n+n^2}$.

2. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x - 2 - 3e^{-y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

3. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \le 2 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 2 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxed{a}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 4\log 2$; $\boxed{b}$ $\alpha = 2+\log 2; \beta = 2-\log 2$; $\boxed{c}$ $\alpha = \log 2; \beta = 2+\log 2$; $\boxtimes$ $\alpha = 2\log 2-1; \beta = 4-4\log 2$.

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\sin x\,dx =$

$\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{x+1}\,dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{d}$ $+\infty$.

5. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{a}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$; $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\cos a_n)$ è convergente; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos a_n$ è divergente; $\boxed{d}$ $a_{n+1} \le a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi.

6. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) + x = 0$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $\int_0^1 [f(x) - x]\,dx < -2$ ; $\boxtimes$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{c}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{d}$ $f(0) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$ .

7. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(e^x - 1)$ è: $\boxtimes$ $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$; $\boxed{b}$ $1 + x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{c}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $x + \frac{x^2}{2}$.

8. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = -2 - 3i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$; $\boxtimes$ $\pm\sqrt{5}(1-i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$.

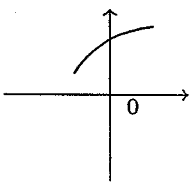
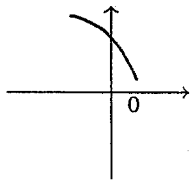
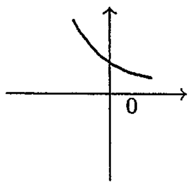
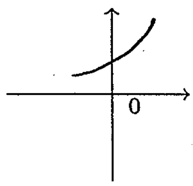
| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | **11 luglio 2011** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 \| |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? [a] $a_{n+1} \leq a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi; [b] $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; [c] $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin a_n)^2$ è convergente; [d] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{a_n}$ è divergente.

2. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) = x$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? [a] $f(0) > 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$ ; [b] $f'(x) > 10$ per ogni $x \in [0,1]$ ; [c] $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$; [d] $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$.

3. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 1 + x - e^{2y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

[a] 
; [b] 
; [c] 
; [d] 
.

4. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è continua e derivabile per: [a] $\alpha = 2\log 2 - 2; \beta = 4 - 2\log 2$; [b] $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 2\log 2$; [c] $\alpha = 1 + \log 2; \beta = 1 - \log 2$; [d] $\alpha = \log 2; \beta = 1 + \log 2$.

5. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = -1 - 2i$ sono: [a] $\pm\sqrt{3}(1+i)$; [b] $\pm\sqrt{7}(1+i)$; [c] $\pm\sqrt{3}(1-i)$; [d] $\pm\sqrt{5}(1-i)$.

6. Quale serie è convergente? [a] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n+n^2}$; [b] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+2^{-n}}$; [c] $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+4}{n+5}\right)$; [d] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^4}}$.

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\,\sin x\,dx =$

[a] $+\infty$; [b] $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x+1}\,dx$; [c] $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$; [d] $\displaystyle\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$.

8. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = e^{1-\cos x}$ è: [a] $x + \frac{x^2}{2}$; [b] $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$; [c] $1 + x + \frac{x^2}{2}$; [d] $1 + \frac{x^2}{2}$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | 11 luglio 2011 |
| --- | --- | --- |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 \| |

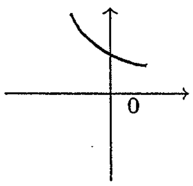
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

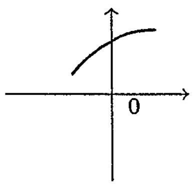
1. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = 2+i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{5}(1-i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$; $\boxed{c}$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$.

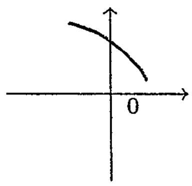
2. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^2}}$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n+n^2}$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+2^{-n}}$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)$.

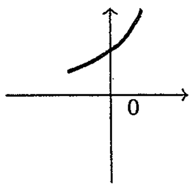
3. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x)+x=0$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $f(0)f(1)<0$ e $f'(x)<-2$ per ogni $x\in[0,1]$; $\boxed{b}$ $f(0)<0$ e $f'(x)>2$ per ogni $x\in[0,1]$ ; $\boxed{c}$ $\int_0^1 [f(x)-x]\,dx < -2$ ; $\boxed{d}$ $f(0)f(1)<0$ e $f'(x)>2$ per ogni $x\in[0,1]$.

4. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = e^{2y} - 1 + x \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

5. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0=0$ di $f(x)=e^{\sin x}$ è: $\boxed{a}$ $1+\frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $x+\frac{x^2}{2}$; $\boxed{c}$ $1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}$; $\boxed{d}$ $1+x+\frac{x^2}{2}$.

6. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos a_n$ è divergente; $\boxed{b}$ $a_{n+1}\le a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi; $\boxed{c}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\cos a_n)$ è convergente.

7. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x\le 1 \\ \alpha x^2+\beta x, & \text{per } x>1 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxed{a}$ $\alpha=\log 2; \beta = 1+\log 2$; $\boxed{b}$ $\alpha = 2\log 2 - 2; \beta = 4-2\log 2$; $\boxed{c}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2-2\log 2$; $\boxed{d}$ $\alpha = 1+\log 2; \beta = 1-\log 2$.

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\sin x\, dx =$

$\boxed{a}$ $\log(1+\frac{\pi}{2}) - \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{x+1}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+1}\,dx$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | **11 luglio 2011** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 \| |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

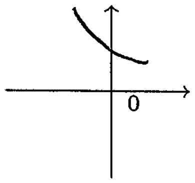
1. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxtimes$ $\alpha = 2\log 2 - 2; \beta = 4 - 2\log 2$;
$\boxed{b}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 2\log 2$; $\boxed{c}$ $\alpha = 1 + \log 2; \beta = 1 - \log 2$; $\boxed{d}$ $\alpha = \log 2; \beta = 1 + \log 2$.

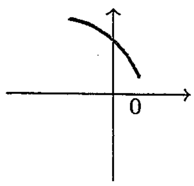
2. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = e^{\sin x}$ è: $\boxed{a}$ $x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$; $\boxtimes$ $1 + x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $1 + \frac{x^2}{2}$.

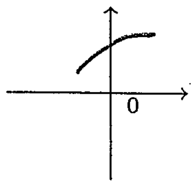
3. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = -1 - 2i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$; $\boxtimes$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{5}(1-i)$.

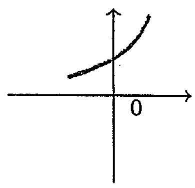
4. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{a}$ $a_{n+1} \leq a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi; $\boxed{b}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin a_n)^2$ è convergente; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{a_n}$ è divergente.

5. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 1 + x - e^{2y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

$\boxtimes$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1) \sin x \, dx =$
$\boxed{a}$ $+\infty$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x+1}\, dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\, dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\, dx$.

7. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n + n^2}$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n + 2^{-n}}$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+4}{n+5}\right)$; $\boxtimes$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^4}}$.

8. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) = x$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $f(0) > 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$ ; $\boxed{b}$ $f'(x) > 10$ per ogni $x \in [0,1]$ ; $\boxed{c}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxtimes$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | **11 luglio 2011** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 \| |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) = x$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{\cancel{b}}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{c}$ $f(0) > 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$ ; $\boxed{d}$ $f'(x) > 10$ per ogni $x \in [0,1]$ .

2. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \leq 2 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 2 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxed{a}$ $\alpha = 2 + \log 2; \beta = 2 - \log 2$; $\boxed{b}$ $\alpha = \log 2; \beta = 2 + \log 2$; $\boxed{\cancel{c}}$ $\alpha = 2\log 2 - 1; \beta = 4 - 4\log 2$; $\boxed{d}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 4\log 2$.

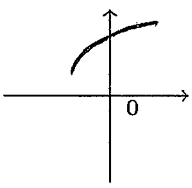
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\, \sin x\, dx =$

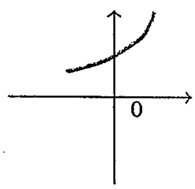
   $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\, dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\, dx$; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{\cancel{d}}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x+1}\, dx$.

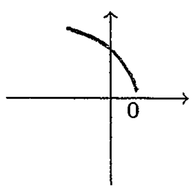
4. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \sin(e^x - 1)$ è: $\boxed{a}$ $1 + x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{\cancel{c}}$ $x + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$.

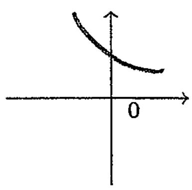
5. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+4}{n+5}\right)$; $\boxed{\cancel{b}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^4}}$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n+n^2}$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{4n+2^{-n}}$.

6. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^{2y} - 1 + x \\ y(0) = 1 \, . \end{cases}$

   $\boxed{a}$ 

   ; $\boxed{\cancel{b}}$ 

   ; $\boxed{c}$ 

   ; $\boxed{d}$ 

   .

7. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = 2 + i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{5}(1-i)$; $\boxed{\cancel{c}}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$.

8. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{\cancel{a}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin a_n)^2$ è convergente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{a_n}$ è divergente; $\boxed{c}$ $a_{n+1} \leq a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi; $\boxed{d}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | 11 luglio 2011 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \|Es1 \|Es2 \|Es3 \| |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \sin(e^x - 1)$ è: $\boxed{a}$ $1+x+\frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $1+\frac{x^2}{2}$; $\boxed{c}$ $x+\frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}$.

2. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty}(\sin a_n)^2$ è convergente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{a_n}$ è divergente; $\boxed{c}$ $a_{n+1} \le a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi; $\boxed{d}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

3. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+4}{n+5}\right)$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^4}}$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n+n^2}$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+2^{-n}}$.

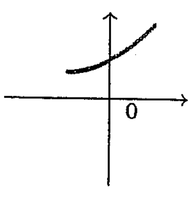
4. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) = x$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{b}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{c}$ $f(0) > 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$ ; $\boxed{d}$ $f'(x) > 10$ per ogni $x \in [0,1]$ .

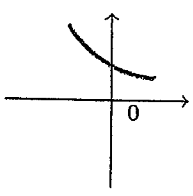
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\,\sin x\,dx =$

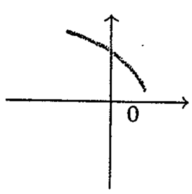
   $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x+1}\,dx$.

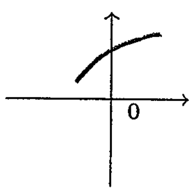
6. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = 4+3i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{5}(1-i)$; $\boxed{c}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$.

7. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2 - x + e^{-y} \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \le 2 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 2 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxed{a}$ $\alpha = 2+\log 2; \beta = 2-\log 2$; $\boxed{b}$ $\alpha = \log 2; \beta = 2+\log 2$; $\boxed{c}$ $\alpha = 2\log 2 - 1; \beta = 4 - 4\log 2$; $\boxed{d}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 4\log 2$.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | 11 luglio 2011 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 \| |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. $\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\sin x\, dx =$

   ☒ $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x+1}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{c}$ $\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{d}$ $+\infty$.

2. Le soluzioni di $\frac{z^2+2}{2+2i} = -2-3i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$; ☒ $\pm\sqrt{5}(1-i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$.

3. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{a}$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; ☒ $\sum_{n=0}^{\infty}(1-\cos a_n)$ è convergente; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos a_n$ è divergente; $\boxed{d}$ $a_{n+1} \le a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi.

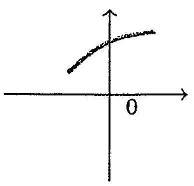
4. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+2^{-n}}$; ☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^2}}$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n+n^2}$.

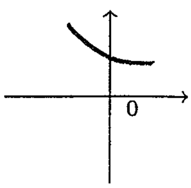
5. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \le 2 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 2 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxed{a}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 4\log 2$; $\boxed{b}$ $\alpha = 2+\log 2; \beta = 2-\log 2$; $\boxed{c}$ $\alpha = \log 2; \beta = 2+\log 2$; ☒ $\alpha = 2\log 2 - 1; \beta = 4 - 4\log 2$.

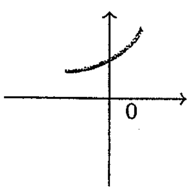
6. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = e^{1-\cos x}$ è: $\boxed{a}$ $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$; $\boxed{b}$ $1 + x + \frac{x^2}{2}$; ☒ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{d}$ $x + \frac{x^2}{2}$.

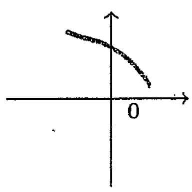
7. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) + x = 0$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $\int_0^1 [f(x) - x]\,dx < -2$ ; ☒ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{c}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{d}$ $f(0) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$ .

8. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x - 2 - 3e^{-y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

   $\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

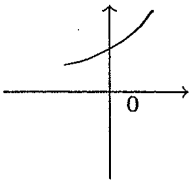
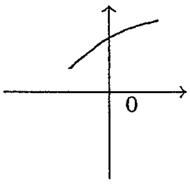
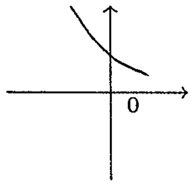
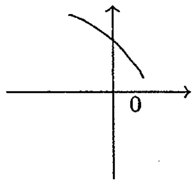
; ☒ 

.

| ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello | | 11 luglio 2011 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |
| **Corso di laurea:** | | Test \| Es1 \| Es2 \| Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2 - x + e^{-y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(x+1)\sin x\,dx =$

$\boxed{a}$ $\displaystyle\log(1+\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+1}\,dx$; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{x+1}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+1}\,dx$.

3. Il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \cos(e^x - 1)$ è: $\boxed{a}$ $1 + \frac{x^2}{2}$; $\boxed{b}$ $x + \frac{x^2}{2}$; $\boxtimes$ $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$; $\boxed{d}$ $1 + x + \frac{x^2}{2}$.

4. Le soluzioni di $\dfrac{z^2+2}{2+2i} = 4 + 3i$ sono: $\boxed{a}$ $\pm\sqrt{5}(1-i)$; $\boxed{b}$ $\pm\sqrt{3}(1+i)$; $\boxtimes$ $\pm\sqrt{7}(1+i)$; $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{3}(1-i)$.

5. Se $f$ è derivabile, quale ipotesi garantisce che l'equazione $f(x) + x = 0$ abbia almeno una soluzione in $[0,1]$? $\boxed{a}$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) < -2$ per ogni $x \in [0,1]$; $\boxed{b}$ $f(0) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$ ; $\boxed{c}$ $\int_0^1 [f(x) - x]\,dx < -2$ ; $\boxtimes$ $f(0)f(1) < 0$ e $f'(x) > 2$ per ogni $x \in [0,1]$.

6. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{per } x \le 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è continua e derivabile per: $\boxed{a}$ $\alpha = \log 2; \beta = 1 + \log 2$; $\boxtimes$ $\alpha = 2\log 2 - 2; \beta = 4 - 2\log 2$; $\boxed{c}$ $\alpha = 2\log 2; \beta = 2 - 2\log 2$; $\boxed{d}$ $\alpha = 1 + \log 2; \beta = 1 - \log 2$.

7. Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e con termini positivi, quale affermazione è sempre vera? $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos a_n$ è divergente; $\boxed{b}$ $a_{n+1} \le a_n$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi; $\boxed{c}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$; $\boxtimes$ $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - \cos a_n)$ è convergente.

8. Quale serie è convergente? $\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n+n^2}}$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^n+n^2}$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{4n+2^{-n}}$; $\boxtimes$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)$.

| ANALISI MATEMATICA 1 | 11 luglio 2011 |
|---|---|

**1.** **(6 punti)** Per $a \in \mathbf{R}$ sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a, & \text{per } x < -1 \\ -x2^{-2x}, & \text{per } x \geq -1. \end{cases}$

• Per quale valore di $a$ la funzione $f$ è continua?
• Per tale valore di $a$ disegnate approssimativamente il grafico di $f$ e trovate se esistono e quali sono i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto.

La funzione $f$ è continua se

$$1-3+a = \lim_{x\to -1^-} (x^2+3x+a) = \lim_{x \to -1^+} (-x2^{-2x}) = 1\cdot 4,$$

cioè $a=6$.

Per lo studio del grafico e la determinazione dei punti di massimo e di minimo cominciamo a vedere i limiti a $-\infty$ e $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x2^{-2x}) = 0^-$ (poiché $2^{2x} \to +\infty$ più velocemente di $x$)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+3x+6) = +\infty$ (è il grafico di una parabola rivolta verso l'alto.

La derivata di $f(x)$ vale:

$\underline{x>-1}$: $f'(x) = -2^{-2x} - x\,2^{-2x}\cdot\log 2\cdot(-2) = -2^{-2x}(1-2x\log 2) > 0$ per $x > \frac{1}{2\log 2} = \frac{1}{\log 4}$.

$\underline{x<-1}$: $f'(x) = 2x+3 > 0$ per $x > -3/2$.

La funzione $f(x)$ dunque $\underline{\text{decresce}}$ per $-\infty < x < -3/2$, $\underline{\text{cresce}}$ per $-3/2 < x < -1$, $\underline{\text{decresce}}$ per $-1 < x < 1/\log 4$, $\underline{\text{cresce}}$ per $x > 1/\log 4$.

Nel punto $x=-1$ si ha $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -2+3 = 1$, $\lim_{x\to-1^+} -2^{-2x}(1-2x\log 2) = -4(1+\log 4)$, quindi in $x=-1$ c'è un punto angoloso.

Infine $f''(x) = 2\cdot 2^{-2x}\log 2\,(1-2x\log 2) + 2^{-2x}\,2\log 2 = 2^{-2x}\log 4\,(2-x\log 4) > 0$ per $-1 < x < 2/\log 4$ (oltre che per $x<-1$, ove $f$ è la parabola $x^2+3x+6\ldots$).

[Scale diverse in x e y...

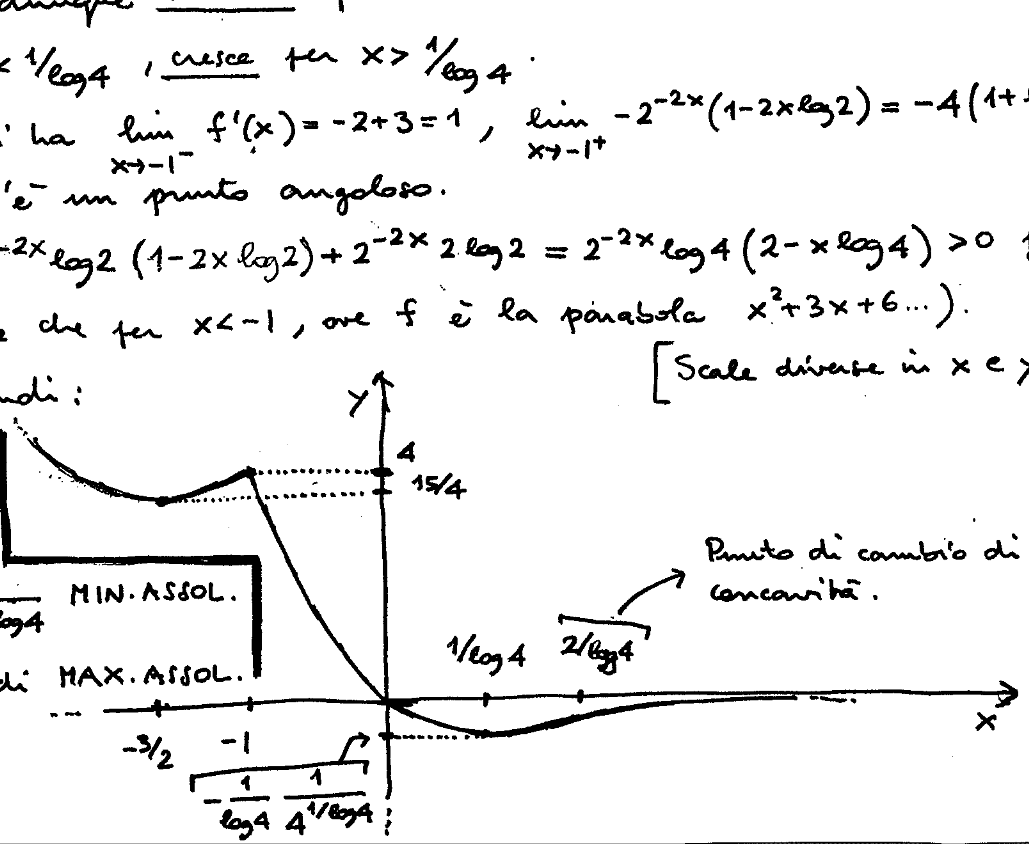
Il grafico è quindi:

$f(-1) = 4$ MAX. REL.

$f(-3/2) = 15/4$ MIN. REL.

$f(1/\log 4) = -\frac{1}{\log 4}\,\frac{1}{4^{1/\log 4}}$ MIN. ASSOL.

$\underline{\text{Non}}$ ci sono punti di MAX. ASSOL.



| ANALISI MATEMATICA 1 | 11 luglio 2011 |
|---|---|

**2. (6 punti)** Risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 25y = 3\cos(5x)\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

È un'equazione del II° ordine, <u>lineare</u>, a coefficienti costanti, <u>non omogenea</u>.

Per trovare la soluzione dell'omogenea si considerano le radici del polinomio associato:

$$\lambda^2 + 25 = 0 \quad \text{per} \quad \lambda = \pm 5i\,,$$

per cui le soluzioni dell'omogenea sono

$$y_0(x) = c_1 \cos(5x) + c_2 \operatorname{sen}(5x)\,.$$

Siccome il termine noto $3\cos(5x)$ è una soluzione dell'omogenea, la forma della soluzione particolare <u>non</u> è $A\cos(5x) + B\operatorname{sen}(5x)$ [questa è appunto una soluzione dell'<u>omogenea</u>...], ma

$y_*(x) = Ax\cos(5x) + Bx\operatorname{sen}(5x)$. Derivando si ha

$$y_*'(x) = A\cos(5x) - 5Ax\operatorname{sen}(5x) + B\operatorname{sen}(5x) + 5Bx\cos(5x)\,,$$

$$y_*''(x) = -5A\operatorname{sen}(5x) - 5A\operatorname{sen}(5x) - 25Ax\cos(5x) + 5B\cos(5x) + 5B\cos(5x) - 25Bx\operatorname{sen}(5x)\,,$$

e imponendo $y_*'' + 25y_* = 3\cos(5x)$ viene

$$-10A\operatorname{sen}(5x) + 10B\cos(5x) - \cancel{25Ax\cos(5x)} - \cancel{25Bx\operatorname{sen}(5x)} + \cancel{25Ax\cos(5x)} + \cancel{25Bx\operatorname{sen}(5x)} = 3\cos(5x)\,,$$

dunque $A = 0$, $B = 3/10$. Quindi $y_*(x) = \frac{3}{10}x\operatorname{sen}(5x)$.

Imponendo i dati di Cauchy, essendo $y(x) = y_0(x) + y_*(x)$ e

$$y'(x) = -5c_1\operatorname{sen}(5x) + 5c_2\cos(5x) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(5x) - \frac{15}{10}x\cos(5x)\,,$$

si ha

$$1 = y(0) = c_1\,, \quad 0 = y'(0) = 5c_2\,,$$

dunque $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, e la soluzione cercata è quindi

$$\boxed{y(x) = \cos(5x) + \frac{3}{10}x\operatorname{sen}(5x)\,.}$$

**3. (6 punti)** Sia $R = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le ax^2 \text{ per } 0 \le x \le 1\,,\, 0 \le y \le bx^2 + c \text{ per } 1 \le x \le 2\}$, ove $y = ax^2$ è la parabola passante per $(0,0)$ e $(1, \frac{1}{4})$ e $y = bx^2 + c$ è la parabola passante per $(1, \frac{1}{4})$ e $(2,0)$. Si determini il volume dell'insieme ottenuto ruotando $R$ attorno all'asse $Y$.

La parabola $y=ax^2$ deve passare per $(0,0)$ e $(1,1/4)$, dunque $0=a\cdot 0$, $1/4=a\cdot 1$, e si ottiene $y=1/4\,x^2$.

La parabola $y=bx^2+c$ deve passare per $(1,1/4)$ e $(2,0)$, dunque $1/4=b+c$, $0=4b+c$, da cui $c=-4b$, $1/4=b-4b=-3b$, $b=-1/12$ e $c=1/3$. Si è quindi ottenuto $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}$.

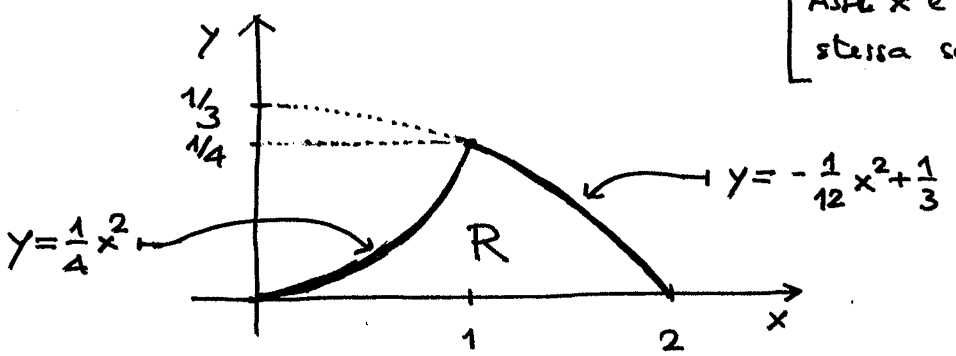
Il volume richiesto è dunque dato da:

$$V = 2\pi\int_0^1 x\cdot\frac{1}{4}x^2\,dx + 2\pi\int_1^2 x\cdot\left(-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}\right)dx =$$

$$= 2\pi\,\frac{1}{16}x^4\Big|_{x=0}^{x=1} + 2\pi\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{48}x^4\right)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{6}-\frac{16}{48}-\frac{1}{6}+\frac{1}{48}\right) = 2\pi\,\frac{3+24-15}{48} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

[Figura, non richiesta:




[Assi x e y non nella stessa scala...

]