ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	12 febbraio 2015

1. (6 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 & \text{se } x \geq 1 \\ (x^2 - 1)e^{-|x|} & \text{se } x < 1 \,. \end{cases}$$

Quindi disegnarne qualitativamente il grafico. (Non sono richiesti i valori di massimo e di minimo né lo studio di convessità e concavità.)

Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3+5x^2-8x+4) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2-1)e^{-|x|} =$ $= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{e^{-x}} = 0$ (per $x<0$, $|x| = -x \ldots$). Dunque non ci saranno minimi assoluti.

Vediamo la derivata di f. Per $x>1$ si ha $f'(x) = -3x^2+10x-8$, che si annulla per $x = \frac{5\mp\sqrt{25-24}}{3} = \begin{cases} 4/3 \\ 2 \end{cases}$. Dunque f cresce fra $4/3$ e 2, f decresce fra 1 e $4/3$ e dopo 2.

Per $x<1$, distinguiamo $x<0$ e $0<x<1$. Per $x<0$ la funzione vale $(x^2-1)e^{+x}$, per cui $f'(x) = 2xe^{+x} + (x^2-1)e^{+x} = +(x^2+2x-1)e^{+x}$, che si annulla per $x = -1-\sqrt{2}$ (e per $x=-1+\sqrt{2}$, fuori zona). Dunque $f(x)$ cresce per $x<-1-\sqrt{2}$, decresce per $-1-\sqrt{2}<x<0$.

Per $0<x<1$ la funzione vale $(x^2-1)e^{-x}$, per cui $f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2-1)e^{-x} =$ $= -(x^2-2x-1)e^{-x}$, che si annulla per $x = 1-\sqrt{2} < 0$ e $x = 1+\sqrt{2} > 1$, valori entrambi fuori zona. Dunque $f(x)$ cresce per $0<x<1$.

La funzione si annulla per $x=-1$, ed è >0 per $x<-1$. Poi $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$ (f è continua in $x=+1$, poiché $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 0$).

Si ha anche $f(2) = 0$, $f(4/3) = -\frac{4}{27}$, $f(0) = -1$.

In conclusione, $-1-\sqrt{2}$ è punto di massimo (assoluto, poiché $f(x) \leq 0$ per $x \geqslant -1$), 0 è punto di minimo relativo, 1 è punto di massimo relativo, $4/3$ è punto di minimo relativo, 2 è punto di massimo relativo.

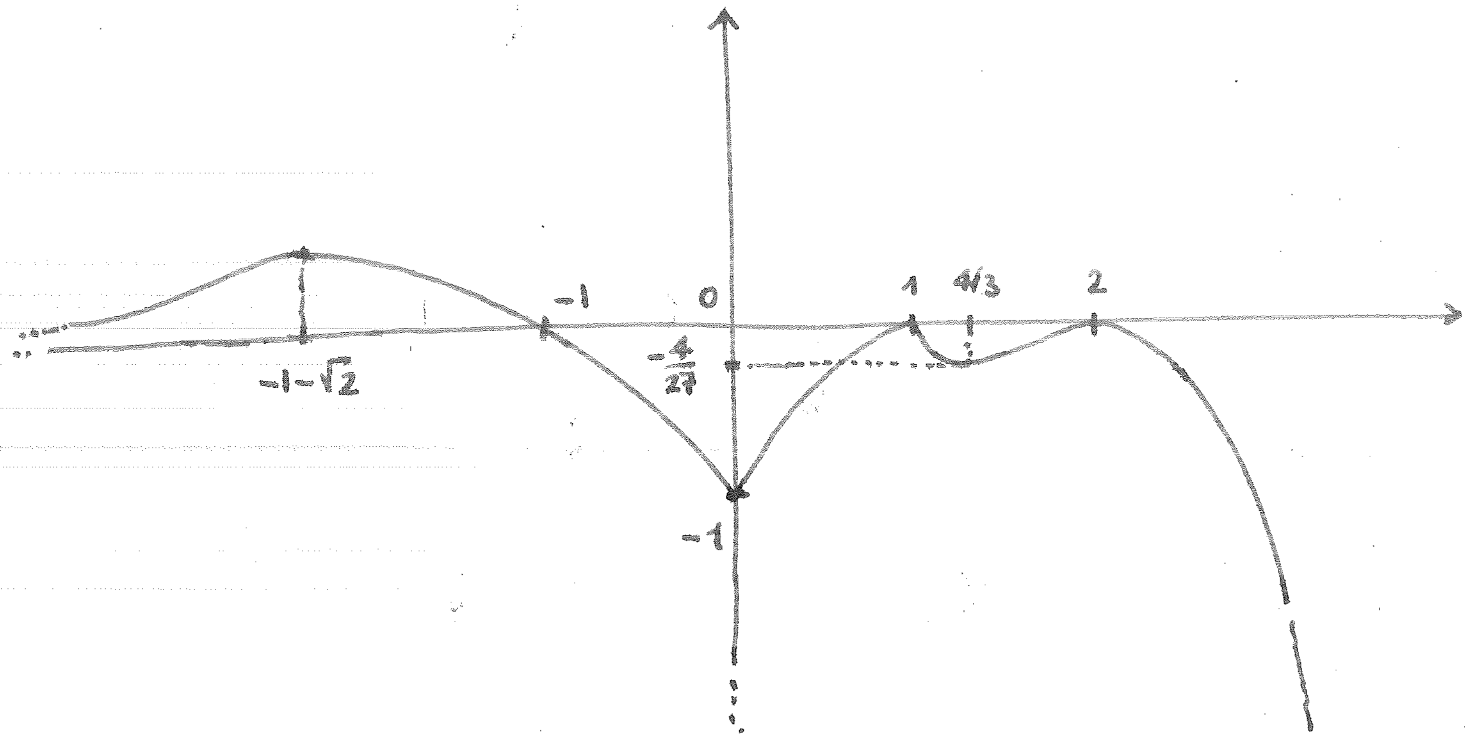
ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	12 febbraio 2015

1. (6 punti) Determinare gli eventuali punti di massimo assoluto e di minimo assoluto, di massimo relativo e di minimo relativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 & \text{se } x \geq 1 \\ (x^2 - 1)e^{-|x|} & \text{se } x < 1\,. \end{cases}$$

Quindi disegnarne qualitativamente il grafico. (Non sono richiesti i valori di massimo e di minimo né lo studio di convessità e concavità.)

Il grafico qualitativo è



ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	12 febbraio 2015

2. (6 punti) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 6\cos x + 5}\, dx\,.$$

Essendo $-\sin x$ la derivata di $\cos x$, sembra "astuto" scrivere $\operatorname{sen}^3 x = \sin x(\sin^2 x) = \sin x(1-\cos^2 x)$. Dunque

$\cos x = t$, $dt = -\sin x\, dx$, $x = 0 \to t = 1$, $x = \pi/2 \to t = 0$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 6\cos x + 5}\, dx = -\int_1^0 \frac{1-t^2}{t^2+6t+5}\, dt =$$

$\hookrightarrow r^2 + 6r + 5 = 0$ per $r = -1, r = -5$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)\cancel{(1+t)}}{(t+5)\cancel{(t+1)}}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t}{t+5}\, dt = \int_0^1 \frac{-5-t+6}{t+5}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(-1 + \frac{6}{t+5}\right) dt = -t\Big|_0^1 + 6\log|t+5|\Big|_0^1 = -1 + 6\log(6/5).$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	12 febbraio 2015

3. **(6 punti)** (i) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^5 \sin x \\ y(0) = -(1/6)^{1/4}. \end{cases}$$

(ii) Si stabilisca il suo intervallo di esistenza. (iii) Qual è la soluzione se il dato di Cauchy è $y(0) = 0$?

(i) È un'equazione non-lineare del 1° ordine, a variabili separabili. Scrivendo $y' = \frac{dy}{dx}$ si arriva a

$$\frac{1}{y^5}\, dy = \sin x\, dx ,$$

e integrando

$$-\frac{1}{4} y^{-4} = \int \frac{1}{y^5} dy = \int \sin x\, dx = -\cos x + \text{cost}.$$

Dal dato di Cauchy si ricava

$$-\frac{1}{4}(y(0))^{-4} = -\frac{1}{4}\left(-\left(\frac{1}{6}\right)^{1/4}\right)^{-4} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = -\frac{3}{2} = -1 + c ,$$

cioè $c = -1/2$.

Dunque

$$-\frac{1}{4} y^{-4} = -\cos x - \frac{1}{2} \Rightarrow y^{-4} = 4\cos x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^4 = \frac{1}{4\cos x + 2} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{(4\cos x + 2)^{1/4}} .$$

[Si è scelto il segno $-$ poiché il dato di Cauchy è < 0 !).

(ii) L'intervallo di esistenza si determina richiedendo $4\cos x + 2 > 0$, cioè $\cos x > -1/2$, cioè $-\frac{2}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$. [0 deve appartenere all'intervallo ...]

(iii) Per il dato di Cauchy $y(0) = 0$ si vede <u>direttamente</u> che $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione.