ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	15 febbraio 2018

1. (6 punti) Si determinino i punti e i valori di massimo relativo, massimo assoluto, minimo relativo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+16}} & \text{se } x \geq 0 \\ (4x^2+1)e^{-2x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si disegni inoltre il grafico qualitativo della funzione (limiti all'infinito, eventuale non continuità o non derivabilità in 0, crescenza/decrescenza; **non** richiesta convessità/concavità).

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+16}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+24x+16}}{\sqrt{9x^2+16}} = 1 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} (4x^2+1)e^{-2x^2} = 0$$

(poiché l'esponenziale e^{2x^2} va più velocemente all'infinito di $4x^2+1$ ...).

Si ha $f(0) = 4/\sqrt{16} = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ (sia $\frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+16}}$ che $(4x^2+1)e^{-2x^2}$ sono funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$, quindi i limiti per $x\to 0^+$ e $x \to 0^-$ non sono altro che i valori delle due funzioni per $x=0$).

Quindi la funzione f è continua in $x=0$.

Per $x>0$ si ha

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{9x^2+16} - (3x+4)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{9x^2+16}}\,\cancel{18}^{9}x}{(9x^2+16)} = \frac{3(9x^2+16) - 9x(3x+4)}{(9x^2+16)^{3/2}} = \frac{48-36x}{(9x^2+16)^{3/2}},$$

quindi f cresce per $x < 48/36 = 4/3$, decresce per $x > 4/3$: $4/3$ è un punto di massimo relativo, in cui si ha $f(4/3) = 8/\sqrt{32} = 8/4\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Per $x<0$ si ha

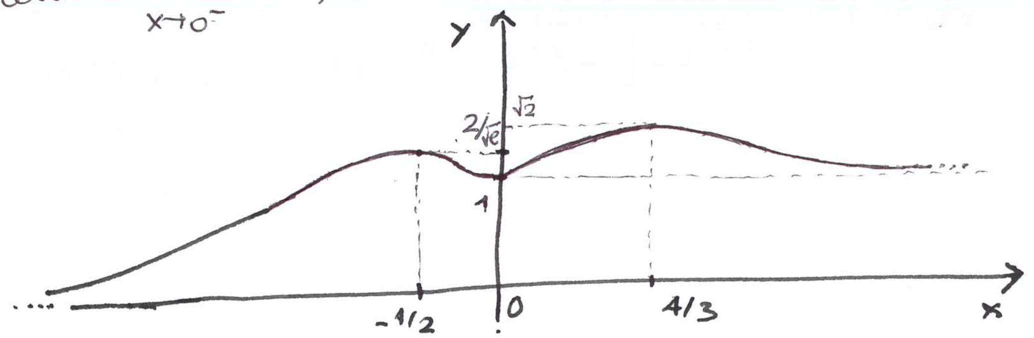
$$f'(x) = 8xe^{-2x^2} + (4x^2+1)e^{-2x^2}\cdot(-4x) = 4xe^{-2x^2}(2-4x^2-1) = 4xe^{-2x^2}(1-4x^2),$$

quindi f cresce per $1-4x^2<0$ (si noti che $x<0$!!), cioè $x < -1/2$, e decresce per $x > -1/2$: $-1/2$ è un punto di massimo relativo, in cui si ha $f(-1/2) = (4\cdot 1/4 + 1)e^{-2\cdot 1/4} = 2e^{-1/2} = 2/\sqrt{e}$.

Siccome $2/\sqrt{e} < \sqrt{2}$ (è equivalente a $\sqrt{2}/\sqrt{e} < 1$, cioè $2 < e = 2{,}7\ldots$), il punto $x = 4/3$ è di massimo assoluto.

Infine il punto $x=0$ è di minimo relativo, con $f(0)=1$.

Per quanto riguarda la derivabilità, si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 48/4^3 = 3/4$, mentre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, per cui f non è derivabile in $x=0$.



ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	15 febbraio 2018

2. (6 punti) (i) Si determini l'insieme dei valori del parametro $\beta \in \mathbf{R}$ per cui l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^2-1)^\beta}{3x^2+13x+12}\,dx$$

è convergente.
(ii) Si calcoli il valore dell'integrale improprio per $\beta = 0$.

(i) L'integrale è improprio all'infinito, ma anche in 1 (se $\beta<0$).

All'infinito si ha

$$\frac{(x^2-1)^\beta}{3x^2+13x+12} \sim \frac{x^{2\beta}}{3x^2} \sim \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{2-2\beta}},$$ che porta a $2-2\beta>1$, cioè $\beta<\frac{1}{2}$.

Vicino a 1 si ha

$$\frac{(x^2-1)^\beta}{3x^2+13x+12} = \frac{(x-1)^\beta(x+1)^\beta}{3x^2+13x+12} \sim \frac{2^\beta (x-1)^\beta}{3+13+12},$$ che porta a $-\beta<1$, cioè $\beta>-1$.

La risposta è dunque $-1<\beta<1/2$.

(ii) Si ha $3x^2+13x+12=0$ per $x = \frac{-13 \mp \sqrt{169-144}}{6} = \frac{-13\mp 5}{6} = \begin{cases} -3 \\ -4/3 \end{cases}$.

Quindi $3x^2+13x+12 = 3(x+3)(x+4/3)$, e bisogna trovare A e B per cui $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4/3} = \frac{1}{(x+3)(x+4/3)}$. Si ha

$$\begin{cases} Ax+Bx = 0 \rightarrow A=-B \qquad A=-3/5. \\ \frac{4}{3}A+3B = 1 \qquad -\frac{4}{3}B+3B=1 \rightarrow 5B=3 \rightarrow B=3/5 \end{cases}$$

Dunque l'integrale diventa

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^2+13x+12}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{3}{5}\left(\frac{1}{x+4/3} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\log\frac{x+4/3}{x+3}\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\log 1 - \log\frac{7/3}{4}\right) = \frac{1}{5}\log\frac{12}{7}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello	15 febbraio 2018

3. **(6 punti)** Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ si determinino tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = e^{\alpha x}.$$

È un'equazione lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti e non-omogenea.

Il polinomio associato è r^2+r-6, e le radici sono $r = \frac{-1 \mp \sqrt{1+24}}{2}$, cioè -3 e 2. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da $y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$.

Una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea si ottiene dal metodo di somiglianza: si ha $y_*(x) = Ae^{\alpha x}$, se $\alpha \neq -3$ e $\alpha \neq 2$ (altrimenti avremmo una soluzione dell'equazione omogenea...); nel caso in cui si ha $\alpha = 2$ si cerca $y_*(x) = Bxe^{2x}$; nel caso in cui si ha $\alpha = -3$ si cerca $y_*(x) = Cxe^{-3x}$.

Dunque, per $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$: $y_*'(x) = \alpha A e^{\alpha x}$, $y_*''(x) = \alpha^2 A e^{\alpha x}$, per cui si impone

$$(\alpha^2 A + \alpha A - 6A)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \quad \text{cioè} \quad A = \frac{1}{\alpha^2+\alpha-6}, \quad y_*(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\alpha-6}.$$

Se $\alpha = 2$: $y_*'(x) = Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$, $y_*''(x) = 2Be^{2x} + 2Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$, per cui si impone

$$4Be^{2x} + \cancel{4Bxe^{2x}} + Be^{2x} + \cancel{2Bxe^{2x}} - \cancel{6Bxe^{2x}} = e^{2x},$$

quindi $B = 1/5$, $y_*(x) = \frac{1}{5}xe^{2x}$.

Se $\alpha = -3$: $y_*'(x) = Ce^{-3x} - 3Cxe^{-3x}$, $y_*''(x) = -3Ce^{-3x} - 3Ce^{-3x} + 9Cxe^{-3x}$, per cui si impone

$$-6Ce^{-3x} + \cancel{9Cxe^{-3x}} + Ce^{-3x} - \cancel{3Cxe^{-3x}} - \cancel{6Cxe^{-3x}} = e^{-3x},$$

quindi $C = -\frac{1}{5}$, $y_*(x) = -\frac{1}{5}xe^{-3x}$.

In conclusione, tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono:

- per $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$, $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{\alpha^2+\alpha-6} e^{\alpha x}$;
- per $\alpha = 2$, $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{5}xe^{2x}$;
- per $\alpha = -3$, $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{5}xe^{-3x}$.