ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2017

1. (6 punti) Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(4x) - 4\log(1-2x^2) - 1}{\sin(3x^2) - e^{3x^2} + 1}.$$

Dagli sviluppi di Taylor sappiamo che, per $t \to 0$:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \quad ; \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\sin t = t + o(t^2) \quad ; \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Dunque

$$\cos(4x) - 1 = -\frac{16x^2}{2} + \frac{256}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$-4\log(1-2x^2) = -4\left(-2x^2 - \frac{(-2x^2)^2}{2} + o(x^4)\right)$$

$$\sin(3x^2) = 3x^2 + o(x^4)$$

$$-e^{3x^2} + 1 = -3x^2 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4),$$

e in conclusione

$$\frac{\cos(4x) - 4\log(1-2x^2) - 1}{\sin(3x^2) - e^{3x^2} + 1} = \frac{-\cancel{8x^2} + \frac{32}{3}x^4 + \cancel{8x^2} + 8x^4 + o(x^4)}{\cancel{3x^2} - \cancel{3x^2} - 9/2\, x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \frac{56/3\, x^4 + o(x^4)}{-9/2\, x^4 + o(x^4)} \longrightarrow -\frac{112}{27}.$$

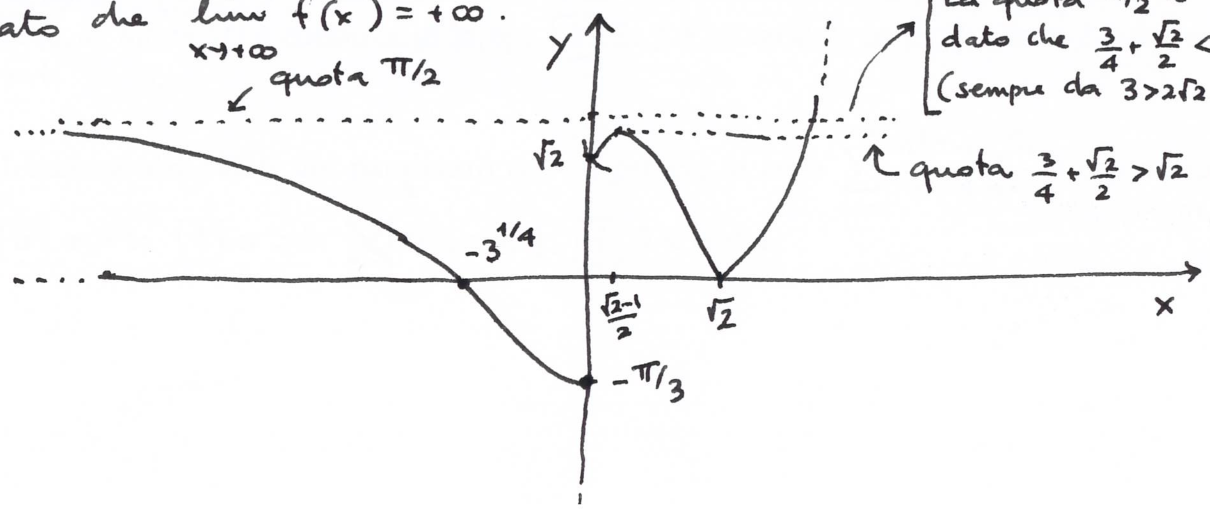
ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2017

2. (6 punti) Determinare (se esistono) i punti di massimo locale e minimo locale e i punti massimo assoluto e minimo assoluto della funzione

$$f(x)=\begin{cases} |x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}| & \text{per } x>0 \\ \arctan(x^2-\sqrt{3}) & \text{per } x\le 0\,. \end{cases}$$

Disegnarne quindi un grafico qualitativo.

La funzione è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Siccome $|x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2| = x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2$ se $x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2\geq 0$, mentre $|x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2| = -x^2-(1-\sqrt2)x+\sqrt2$ se $x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2<0$, studiamo il segno di $x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2$. Si ha $x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2=0$ per $x=\frac{-1+\sqrt2\mp\sqrt{(1-\sqrt2)^2+4\sqrt2}}{2}=$
$=\frac{-1+\sqrt2\mp\sqrt{1+2-2\sqrt2+4\sqrt2}}{2}=\frac{-1+\sqrt2\mp\sqrt{1+2+2\sqrt2}}{2}=\frac{-1+\sqrt2\mp\sqrt{(1+\sqrt2)^2}}{2}=\begin{cases}-1\\ \sqrt2\end{cases}$.
Quindi si ha $x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2<0$ per $-1<x<\sqrt2$, e dunque concludiamo che $f(x)=\arctan(x^2-\sqrt3)$ per $x\leq 0$, $f(x)=-x^2-(1-\sqrt2)x+\sqrt2$ per $0<x\leq\sqrt2$, $f(x)=x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2$ per $x\geq\sqrt2$. Si ha anche $f(x)<0$ per $x<0$ e $x^2-\sqrt3<0$, cioè per $-3^{1/4}<x<0$; $f(x)\geq 0$ altrimenti.
Inoltre $f(0)=\arctan(-\sqrt3)=-\arctan\sqrt3=-\pi/3$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-x^2-(1-\sqrt2)x+\sqrt2)=\sqrt2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+(1-\sqrt2)x-\sqrt2)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan(x^2-\sqrt3)=\pi/2$. f ha dunque una discontinuità di salto in $x=0$.
Facendo la derivata si ottiene $f'(x)=\frac{1}{1+(x^2-\sqrt3)^2}\,2x$ per $x<0$; $f'(x)=-2x-1+\sqrt2$ per $0<x<\sqrt2$; $f'(x)=2x+1-\sqrt2$ per $x>\sqrt2$. Quindi f decresce per $x\leq0$; cresce per $0<x<\frac{\sqrt2-1}{2}$ e decresce per $\frac{\sqrt2-1}{2}<x<\sqrt2$; cresce per $x>\sqrt2$. Di conseguenza $x=0$ è punto di minimo assoluto, con $f(0)=-\pi/3$; $x=\frac{\sqrt2-1}{2}$ è punto di massimo relativo, con $f\left(\frac{\sqrt2-1}{2}\right)=-\frac{(\sqrt2-1)^2}{4}-(1-\sqrt2)\frac{\sqrt2-1}{2}+\sqrt2=\frac{(\sqrt2-1)^2}{4}+\sqrt2=\frac34+\frac{\sqrt2}{2}$; $x=\sqrt2$ è punto di minimo relativo, con $f(\sqrt2)=0$. Non ci sono massimi assoluti dato che $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.



La quota $\pi/2$ è > di $\frac34+\frac{\sqrt2}{2}$, dato che $\frac34+\frac{\sqrt2}{2}<\frac32<\frac{\pi}{2}$ (sempre da $3>2\sqrt2$...).

quota $\frac34+\frac{\sqrt2}{2}>\sqrt2$ (dato che $3>2\sqrt2$...).

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2017

3. **(6 punti)** Si calcoli
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\tan^2(x+\pi)}{\tan^2(x+\pi)+\tan(x+\pi)+1}\,dx\,.$$

La tangente è una funzione periodica di periodo π. Dunque $\tan(x+\pi) = \tan x$.

Usando il cambiamento di variabile $t = \tan x$, che dà $dt = (1+\tan^2 x)\,dx$ e $t=1$ per $x=\pi/4$, $t=\sqrt{3}$ per $x=\pi/3$, si arriva a

completando il quadrato...

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\tan^2(x+\pi)}{\tan^2(x+\pi)+\tan(x+\pi)+1}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t+1/2)^2-1/4+1}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t+1/2)^2+3/4}\,dt = \frac{4}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{4}{3}(t+1/2)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(t+1/2)\right]^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(t+1/2)\right]\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$