ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2018

1. (6 punti) Si determinino, se esistono, i punti e i valori di massimo relativo, massimo assoluto, minimo relativo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2 - 6x + 8|} & \text{se } x \geq 0 \\ \log(x^2 + x + 1) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si disegni inoltre il grafico qualitativo della funzione (limiti all'infinito, eventuale non continuità in 0, crescenza/decrescenza; **non** richiesta convessità/concavità).

Si può innanzitutto verificare che f sia ben definita. Bisogna che sia $x^2+x+1>0$ per $x<0$: siccome le radici di $x^2+x+1=0$ sono $x=\frac{-1\mp\sqrt{1-4}}{2}$, complesse coniugate, si ha $x^2+x+1>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Si ha $f(0)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2\sqrt{2}$, $\lim_{x\to 0^-}\log(x^2+x+1)=0$: dunque f non è continua per $x=0$.

Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x+8}=+\infty$ (x^2 diverge più velocemente di $-6x+8$),

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\log(x^2+x+1)=+\infty$ (x^2 diverge più velocemente di $x+1$).

La funzione f non ha quindi massimi assoluti.

Si verifica anche che $f(x)=0$ per $x^2-6x+8=0$, cioè per $x=2$ e $x=4$, e per $x^2+x+1=1$, cioè $x^2+x=0$, ossia $x=0$ (escluso dal dominio ove f è definita come $\log(x^2+x+1)$) e $x=-1$.

Facendo le derivate, per $x<0$ si ha $f'(x)=\frac{1}{x^2+x+1}(2x+1)$, che è >0 per $x>-1/2$ (dunque f decresce per $x<-1/2$, cresce per $-1/2<x<0$); per $x>0$ si ha $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-6x+8}}(2x-6)$ quando $x^2-6x+8>0$, ossia $0<x<2$ e $x>4$, mentre si ha $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+6x-8}}(-2x+6)$ quando $x^2-6x+8<0$, ossia $2<x<4$. Quindi, considerati questi risultati, per $x>4$ f cresce, e anche per $2<x<3$, e decresce per $0<x<2$ e $3<x<4$.

In conclusione $x=-1/2$ è punto di minimo relativo; $x=2$ è punto di minimo relativo; $x=3$ è punto di massimo relativo; $x=4$ è punto di minimo relativo; $x=0$ è punto di massimo relativo. Siccome $f(x)<0$ solo per $-1<x<0$, $x=-1/2$ è punto di minimo assoluto.

I valori sono: $f(-1/2)=\log 3/4$, $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=0$.

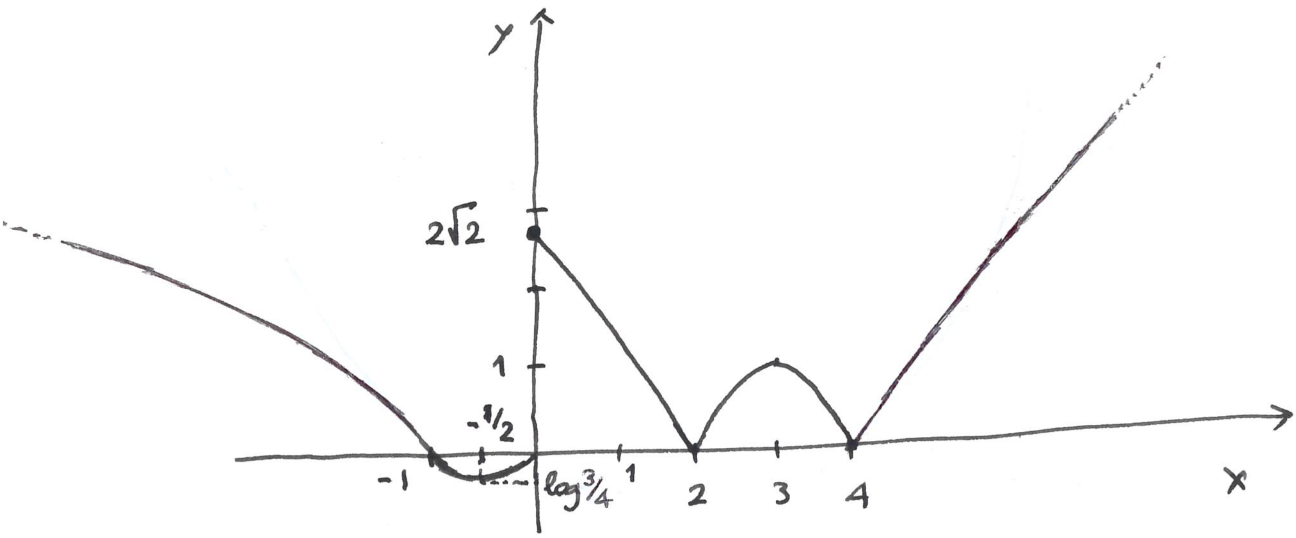
ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2018

1. (6 punti) Si determinino, se esistono, i punti e i valori di massimo relativo, massimo assoluto, minimo relativo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2 - 6x + 8|} & \text{se } x \geq 0 \\ \log(x^2 + x + 1) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si disegni inoltre il grafico qualitativo della funzione (limiti all'infinito, eventuale non continuità in 0, crescenza/decrescenza; **non** richiesta convessità/concavità).

Il grafico qualitativo è



ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2018

2. **(6 punti)** Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(-3x^3)\sin(2x)}{\log\left[3\cos^2(2x)-2\right]+12x^2}.$$

Si ha, per $t\to 0$ (oppure $w\to 0$):

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{t+o(t)}{\cos t} \sim t \quad ; \quad \sin t = t + o(t) \sim t \ ;$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \quad ; \quad \log(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + o(w^2),$$

per cui

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16}{24}x^4 + o(x^4) \quad ; \quad \cos^2(2x) = \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 =$$

$$= 1 + 4x^4 + o(x^4) - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 =$$

$$= 1 - 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(3\cos^2(2x)-2) = \log\left(3 - 12x^2 + 16x^4 + o(x^4) - 2\right) = \log\Big(1 \underbrace{-12x^2 + 16x^4 + o(x^4)}_{w}\Big) =$$

$$= -12x^2 + 16x^4 + o(x^4) - \left(-12x^2 + 16x^4 + o(x^4)\right)^2/2 + o(x^4) =$$

$$= -12x^2 + 16x^4 - \frac{144}{2}x^4 + o(x^4) = -12x^2 - 56x^4 + o(x^4).$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(-3x^3)\sin(2x)}{\log\left[3\cos^2(2x)-2\right]+12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^3\cdot 2x}{-\cancel{12}x^2 - 56x^4 + o(x^4) + \cancel{12}x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-6x^4}{-56x^4 + o(x^4)} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quarto appello	17 luglio 2018

3. **(6 punti)** Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = 3 + e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

È un'equazione lineare del 2° ordine, non-omogenea, a coefficienti costanti.
La soluzione dell'omogenea si esprime tramite le radici del polinomio associato $r^2 - 2r = 0$, cioè $r_1 = 0$ e $r_2 = 2$. Si ha quindi che la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'addendo 3 si cerca un polinomio di grado 1 : $y_*= Ax$ [se si provasse con un polinomio di grado 0, cioè $y_* = A$, si avrebbe una soluzione <u>dell'omogenea</u>! La "cura" dunque è moltiplicare per x...]. Si ha $y_*' = A$, $y_*'' = 0$, per cui imponendo che sia $y_*'' - 2y_*' = 3$ viene $-2A = 3$, $A = -3/2$.
Analogamente, per trovare una soluzione particolare dell'addendo e^{2x} si cerca una funzione $y_{**}(x) = Be^{2x}x$ [se si provasse con Be^{2x} si avrebbe una soluzione dell'omogenea : dunque la "cura" è...].
Si ha $y_{**}' = Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$, $y_{**}'' = 2Be^{2x} + 2Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$, e imponendo che sia $y_{**}'' - 2y_{**}' = e^{2x}$ viene $4Be^{2x} + \cancel{4Bx e^{2x}} - 2Be^{2x} - \cancel{4Bx e^{2x}} = 2Be^{2x} = e^{2x}$, cioè $B = 1/2$.
In conclusione la soluzione <u>generale</u> dell'equazione non-omogenea è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}xe^{2x}.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ha $\left(y'(x) = 2c_2 e^{2x} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} \right)$:

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = c_1 + c_2 & & c_1 = -1/2 \\ 0 &= y'(0) = 2c_2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \Rightarrow\ & c_2 = 1/2 \end{aligned}$$

In definitiva la soluzione è :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}xe^{2x}.}$$