ANALISI MATEMATICA 1		25 gennaio 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Corso di laurea:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. L'insieme dei numeri complessi per cui $2\,\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z \geq 1$ e $|z+3i+1| < 1$ è: $\boxed{a}$ vuoto; $\boxed{b}$ un cerchio; $\cancel{\boxed{c}}$ un semicerchio; $\boxed{d}$ un semipiano.

2. Per quale valore del parametro $a \neq 0$ la funzione

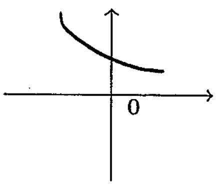
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{a\sqrt{x}} & \text{per } x > 0 \\ 2ax + 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

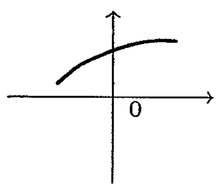
è continua in $x = 0$? $\boxed{a}$ $a = -1$; $\boxed{b}$ $a = 2$; $\boxed{c}$ $a = -2$; $\cancel{\boxed{d}}$ $a = 1$.

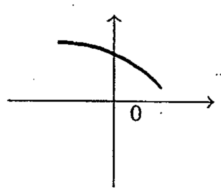
3. Sia $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se f è decrescente, allora f^2 è decrescente; $\boxed{b}$ Se f^2 è continua, allora f è continua; $\cancel{\boxed{c}}$ Se f è continua, allora $|f|$ è continua; $\boxed{d}$ Se f è continua, allora f^2 è derivabile.

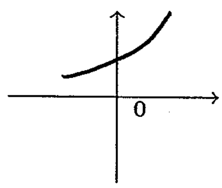
4. Indicate quale grafico rappresenta vicino all'origine la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\cos y - e^x \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \,. \end{cases}$$

$\cancel{\boxed{a}}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

5. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 2\beta x + \alpha & \text{per } x \geq 0 \\ 2\alpha x^2 + 2x - \beta & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$? $\boxed{a}$ $\alpha = -2$, $\beta = 2$; $\boxed{b}$ $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $\cancel{\boxed{c}}$ $\alpha = -1$, $\beta = 1$; $\boxed{d}$ $\alpha = 2$, $\beta = -2$.

6. La somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$ è: $\boxed{a}$ $x^2 e^{x^2}$; $\cancel{\boxed{b}}$ $xe^{x^2} - x$; $\boxed{c}$ $e^{x^2} - 1$; $\boxed{d}$ $x^3 e^{x^2}$.

7. Sia $a_n \geq 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ è convergente; $\boxed{b}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ è divergente; $\cancel{\boxed{c}}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ è convergente; $\boxed{d}$ Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ è convergente.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}}{6e^{-x} + 1 - \cos\left(\frac{2}{x}\right)} =$ $\cancel{\boxed{a}}$ $-\frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{3}$; $\boxed{c}$ $-\frac{1}{3}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}$.

ANALISI MATEMATICA 1	25 gennaio 2011

1. **(6 punti)** Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y^2 - 3y + 1 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Se la soluzione è definita per ogni $x \geq 0$, calcolate inoltre $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

È un'equazione del 1° ordine, nonlineare, a variabili separabili.
Si ha

$$\frac{dy}{dx} = 1\cdot(2y^2-3y+1) \Rightarrow \int \frac{dy}{2y^2-3y+1} = \int dx = x + \text{cost.}$$

La primitiva dell'integrale razionale si ottiene a questo modo.
Si trovano le radici: $2y^2-3y+1=0$ per $y = \frac{3\mp\sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ 1 \end{cases}$.
Quindi si cercano A e B per cui:

$$\frac{1}{2y^2-3y+1} = \frac{1}{2\,(y^2-3/2\,y+1/2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{y-1/2} + \frac{B}{y-1}\right).$$

Si deve avere $A+B=0$, $-A-B/2 = 1$, cioè $B=2$ e $A=-2$. Così abbiamo

$$\int \frac{dy}{2y^2-3y+1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{y-1} - \frac{2}{y-1/2}\right)dy = \log|y-1| - \log|y-1/2| = \log\frac{|y-1|}{|y-1/2|}.$$

Siccome per $x=0$ si ha $y=0$, possiamo eliminare i moduli scrivendo

$$\log\frac{|y-1|}{|y-1/2|} = \log\frac{1-y}{1/2-y} = x + \text{cost}, \quad \text{da cui cost} = \log\frac{1}{1/2} = \log 2.$$

Dunque

$$\frac{1-y}{1/2-y} = e^{x+\log 2} = 2e^x \Rightarrow 1-y = e^x - 2e^x y \Rightarrow y(1-2e^x) = 1-e^x$$

e quindi

$$\boxed{y(x) = \frac{1-e^x}{1-2e^x}.}$$

Siccome $1-2e^x < 0$ per $x \geq 0$, la soluzione è definita per $x \geq 0$. Il suo limite vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^x}{1-2e^x} = 1/2.$$

2. (6 punti) Per ogni $a > 0$ si calcolino l'area della superficie ottenuta facendo ruotare il grafico

$$G = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2\,, y = f(x)\}\ ,\quad f(x) = \begin{cases} ax & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 2a - ax & \text{per } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

attorno all'asse Y e l'area della superficie ottenuta facendo ruotare G attorno all'asse X. Si determini il valore di a per cui le due aree sono uguali.

L'area attorno all'asse Y è data da

$$A_Y = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+a^2}\,dx = 2\pi\sqrt{1+a^2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= 4\pi\sqrt{1+a^2}\,.$$

L'area attorno all'asse X è data da

$$A_X = 2\pi \int_0^2 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 ax\sqrt{1+a^2}\,dx + 2\pi\int_1^2 (2a-ax)\sqrt{1+a^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{1+a^2}\,a\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} + 2\pi\sqrt{1+a^2}\,a\left(-\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2}\right) =$$

$$= 2\pi\sqrt{1+a^2}\,\frac{a}{2} + 2\pi\sqrt{1+a^2}\,a\left(+\frac{1}{2}\right) = 2\pi\sqrt{1+a^2}\,a\,.$$

Per avere l'uguaglianza si deve avere

$$4\pi\sqrt{1+a^2} = 2\pi\sqrt{1+a^2}\,a\,,$$

quindi $\underline{a=2}$.

ANALISI MATEMATICA 1	25 gennaio 2011

3. (6 punti) Trovate, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto in $(-\infty, +\infty)$ di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+2x+2} & \text{per } x < 0 \,. \end{cases}$$

Si ha $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1 \geq 1$, dunque $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $x<0$ si ha $f(x)>0$ per $x>-1$ e $f(x)<0$ per $x<-1$, mentre per $x \geq 0$ si ha sempre $f(x)>0$. Infine $f(-1)=0$.
Calcoliamo i limiti all'infinito e a 0^-:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0^+ \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+1/x)}{x^2(1+2/x+2/x^2)} = 0^- \; ;$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x+1}{x^2+2x+2} = 1/2 \,.$$

Poi $f(0) = \frac{1}{x+2}\Big|_{x=0} = 1/2$, dunque f è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo la derivata: per $x>0$ si ha $f'(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$;
per $x<0$ si ha $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)'$, cioè

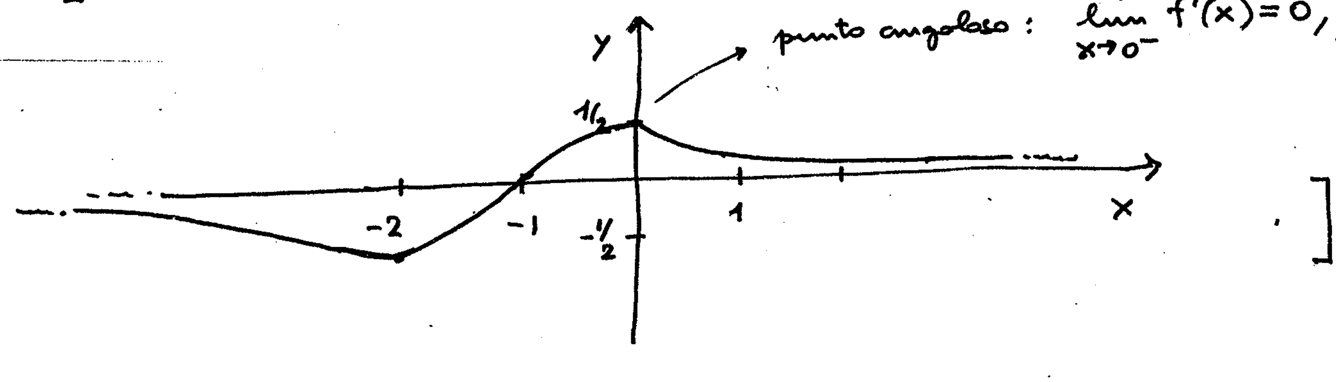
$$\left(\frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)' = \frac{x^2+2x+2-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{x^2+2x+2-2x^2-4x-2}{(x^2+2x+2)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2x}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2} > 0 \text{ per } -2<x<0 \,.$$

Quindi f decresce per $x>0$ e per $-\infty<x<-2$; cresce per $-2<x<0$.
Siccome sappiamo che $f(x)>0$ per $x\geq0$ e per $-1<x<0$, si conclude che il punto $x=0$ è di massimo assoluto con $f(0)=1/2$, e il punto $x=-2$ è di minimo assoluto con $f(-2)=-1/2$.

[Grafico, qualitativo, non richiesto:

punto angoloso: $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{1}{4}$.



]