ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	25 gennaio 2016

1. (6 punti) Determinate il polinomio di Taylor di quarto grado con centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log(1+x) + \sin^2(2x^2 + x)$.

Gli sviluppi di Taylor danno:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad (\text{per } t \to 0).$$

Ponendo $t = 2x^2+x$, ne deriva (essendo $2x^2+x \sim x$, $o((2x^2+x)^3) = o(x^3)$..)

$$\sin(2x^2+x) = 2x^2+x - \frac{(2x^2+x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= 2x^2+x - \frac{x^3}{6} + o(x^3). \quad \left[(2x^2+x)^3 = x^3 + o(x^3) \dots\right]$$

Ancora

$$\sin^2(2x^2+x) = \left(2x^2+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 =$$

$$= 4x^4 + x^2 + 4x^3 - \frac{x^4}{3} + o(x^4). \quad \left[-\frac{x^4}{3} \text{ viene dal doppio prodotto fra } x \text{ e } -\frac{x^3}{6} \dots\right]$$

In conclusione

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 4x^4 + x^2 + 4x^3 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{13}{3}x^3 + \frac{41}{12}x^4.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	25 gennaio 2016

2. (6 punti) Sia $D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}\}$. Si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare l'insieme D attorno all'asse X.

Il volume richiesto si calcola tramite la formula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \,, \text{ cioè } V = \pi \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{(2+e^{-x})^2} dx .$$

Scrivendo $t = e^{-x}$ $\left(dt = -e^{-x} dx \,,\; x=0 \to t=1 \,,\; x=1 \to t = e^{-1} = 1/e \right)$,
si riscrive come $\left(e^{-2x} = (e^{-x})^2 = e^{-x} \cdot e^{-x} \ldots \right)$

$$\pi \int_1^{1/e} \frac{(-t)}{(2+t)^2} dt = \pi \int_{1/e}^1 \frac{t}{(2+t)^2} dt = \pi \int_{1/e}^1 \frac{t+2-2}{(2+t)^2} dt =$$

$$= \pi \int_{1/e}^1 \left(\frac{1}{2+t} - \frac{2}{(2+t)^2} \right) dt = \pi \left[\log|2+t| \Big|_{1/e}^1 + 2(2+t)^{-1} \Big|_{1/e}^1 \right] =$$

$$= \pi \left[\log \frac{3}{2+1/e} + \frac{2}{3} - \frac{2}{2+1/e} \right] = \pi \left(\log \frac{3e}{2e+1} + \frac{2}{3} - \frac{2e}{2e+1} \right).$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Primo appello	25 gennaio 2016

3. (6 punti) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = e^{-x} + 2x\,.$$

Quindi determinarne due che soddisfino $y(0) = 0$ ed altre due che soddisfino $y'(0) = 0$.

È un'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti, non-omogenea.
Il polinomio associato è $r^2 - r - 2$, e le sue radici sono $r = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$. Dunque la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}\,.$$

Siccome il termine noto e^{-x} è soluzione dell'omogenea, si deve provare a trovare una soluzione della non-omogenea della forma $y_*(x) = Axe^{-x}$. Si ha $y_*' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$, $y_*'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$. Dunque si vuole

$$e^{-x} = y_*'' - y_*' - 2y_*'' = (-2Ae^{-x} + \cancel{Axe^{-x}}) - (Ae^{-x} - \cancel{Axe^{-x}}) - 2(\cancel{Axe^{-x}}) =$$
$$= -3Ae^{-x} \Rightarrow A = -1/3\,,\quad y_*(x) = -\tfrac{1}{3}xe^{-x}.$$

Per l'altro addendo $2x$ si deve provare con $y^*(x) = B + Cx$, da cui $(y^*)' = C$, $(y^*)'' = 0$ e quindi

$$2x = 0 - C - 2(B + Cx) \Rightarrow C = -1\,,\ B = 1/2 \quad \left(\text{da } \begin{matrix} -2Cx = 2x \\ -C - 2B = 0 \ldots \end{matrix}\right).$$

Tutte le soluzioni sono quindi date da

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \tfrac{1}{3}xe^{-x} + \tfrac{1}{2} - x}\,.$$

Si ha $y(0) = c_1 + c_2 + 1/2$, per cui due soluzioni si ottengono dall'equazione $c_1 = -c_2 - 1/2$ con due scelte di c_2, per esempio $c_2 = 0 \to c_1 = -1/2$, $c_2 = -1/2 \to c_1 = 0$: $y(x) = -1/2\, e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x} + 1/2 - x$, $y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{-x} + \frac{1}{2} - x$.

Siccome $y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - 1$, imponendo $y'(0) = 0$ viene $-c_1 + 2c_2 - 4/3 = 0$, per cui con $c_2 = 0$ viene $c_1 = -4/3$, con $c_1 = 0$ viene $c_2 = 2/3$ e $y(x) = -\frac{4}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x} + \frac{1}{2} - x$, $y(x) = \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{-x} + \frac{1}{2} - x$.