ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	27 giugno 2018

1. **(6 punti)** Si determinino, se esistono, i punti e i valori di massimo relativo, massimo assoluto, minimo relativo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 - x^3 - 9x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x(x^2 + 4x) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si disegni inoltre il grafico qualitativo della funzione (limiti all'infinito, eventuale non continuità in 0, crescenza/decrescenza; **non** richiesta convessità/concavità).

Si ha $f(0) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x(x^2+4x) = 0$. Dunque f non è continua in 0. Si ha anche facilmente $f(-4) = 0$.

Poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (6x^2 - x^3 - 9x + 1) = -\infty$ (domina il termine $-x^3 \dots$),

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+4x) = 0$ (domina il termine $e^x \dots$).

Dunque f non ha minimi assoluti.

Per $x > 0$ si ha $f'(x) = 12x - 3x^2 - 9$, e le radici sono le soluzioni di

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \mp \sqrt{36-27}}{3} = \frac{6\mp 3}{3} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}.$$

In particolare, $f'(x) > 0$ per $1 < x < 3$, $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ e $x > 3$: dunque f cresce per $1 < x < 3$, decresce per $0 < x < 1$ e $x > 3$, e di conseguenza $x = 1$ è punto di minimo relativo, $x = 3$ è punto di massimo relativo, con $f(1) = -3$, $f(3) = 1$.

Per $x < 0$ si ha $f'(x) = e^x(x^2+4x) + e^x(2x+4) = e^x(x^2+6x+4)$, che si annulla per

$$x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = -3 \mp \sqrt{9-4} = -3 \mp \sqrt{5}.$$

Dunque f cresce per $x < -3-\sqrt{5}$, decresce per $-3-\sqrt{5} < x < -3+\sqrt{5}$, cresce per $-3+\sqrt{5} < x < 0$. Di conseguenza $x = -3-\sqrt{5}$ è punto di massimo relativo, $x = -3+\sqrt{5}$ è punto di minimo relativo, e infine $x = 0$ è punto di massimo relativo.

Si ha

$$f(-3-\sqrt{5}) = e^{-3-\sqrt{5}}((-3-\sqrt{5})^2 + 4(-3-\sqrt{5})) = e^{-3-\sqrt{5}}(9+5+6\sqrt{5}-12-4\sqrt{5}) = e^{-3-\sqrt{5}}(2+2\sqrt{5}),$$

$$f(-3+\sqrt{5}) = e^{-3+\sqrt{5}}((-3+\sqrt{5})^2 + 4(-3+\sqrt{5})) = e^{-3+\sqrt{5}}(9+5-6\sqrt{5}-12+4\sqrt{5}) = e^{-3+\sqrt{5}}(2-2\sqrt{5}).$$

Per cercare il massimo assoluto bisogna stimare $f(-3-\sqrt{5})$. Si ha

$f(-3-\sqrt{5}) = \frac{2+2\sqrt{5}}{e^{3+\sqrt{5}}} < \frac{8}{2^5} = \frac{1}{4} < 1$ [si è usato $2 < \sqrt{5} < 3$, $e > 2 \dots$]. Quindi il massimo assoluto è 1, per $x = 0$ e $x = 3$.

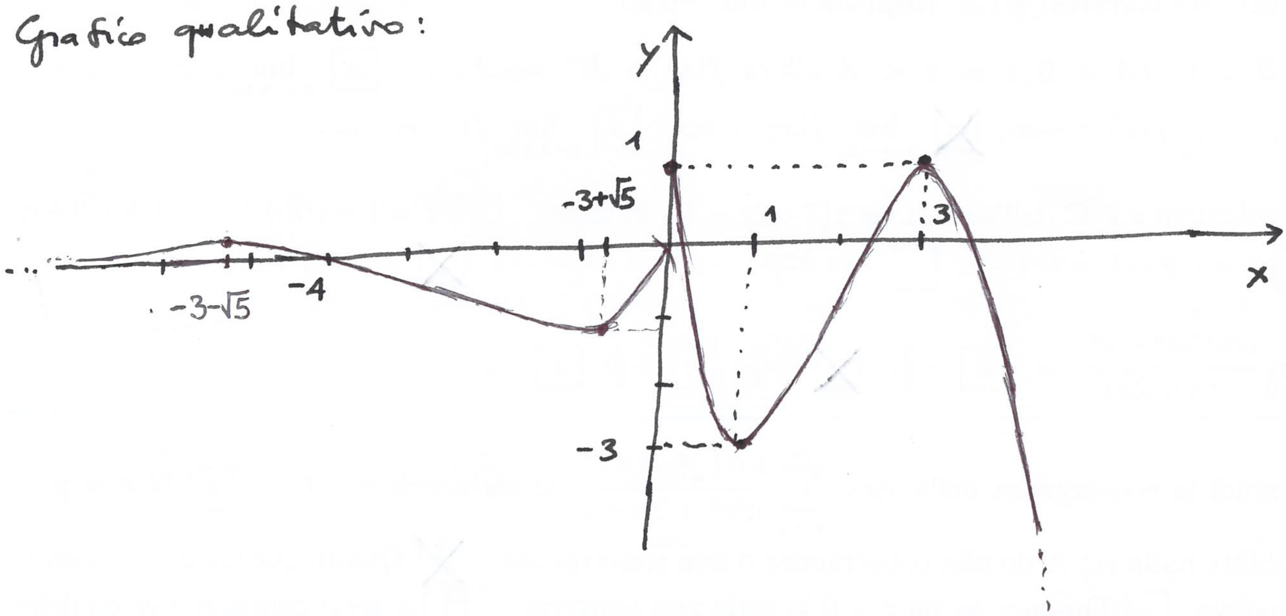
ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	27 giugno 2018

1. **(6 punti)** Si determinino, se esistono, i punti e i valori di massimo relativo, massimo assoluto, minimo relativo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 - x^3 - 9x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x(x^2 + 4x) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Si disegni inoltre il grafico qualitativo della funzione (limiti all'infinito, eventuale non continuità in 0, crescenza/decrescenza; **non** richiesta convessità/concavità).

Grafico qualitativo:



ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	27 giugno 2018

2. (6 punti) Sia $f(t) = te^{2t^3}$ e per ogni $c > 0$ sia $A_c = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(cx)\}$.
(i) Per ogni $c > 0$ calcolare i volumi V_c^X e V_c^Y dei solidi di rotazione ottenuti ruotando A_c attorno all'asse x e all'asse y, rispettivamente.
(ii) Per $c \to +\infty$, quale dei due volumi è definitivamente più piccolo dell'altro?

(i) Si ha $f(cx) = cxe^{2(cx)^3} = cxe^{2c^3x^3}$ (si è "sostituito" cx a t...).

Dunque

$$V_c^X = \pi \int_0^1 [f(cx)]^2 dx = \pi \int_0^1 c^2x^2 e^{4c^3x^3} dx = \pi \frac{1}{12c} \int_0^1 12c \cdot c^2 x^2 \cdot e^{4c^3x^3} dx =$$

$$= \frac{\pi}{12c} e^{4c^3x^3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12c}(e^{4c^3} - 1).$$

$$\left[(e^{4c^3x^3})' = e^{4c^3x^3} \cdot 3 \cdot 4c^3x^2 = 12c^3x^2 e^{4c^3x^2} \right]$$

$$V_c^Y = 2\pi \int_0^1 x [f(cx)] dx = 2\pi \int_0^1 xcxe^{2c^3x^3} dx = 2\pi \frac{1}{6c^2} \int_0^1 6c^2 cx^2 e^{2c^3x^3} dx =$$

$$= \frac{\pi}{3c^2} e^{2c^3x^3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3c^2}(e^{2c^3} - 1).$$

(ii) Si ha

$$\frac{V_c^X}{V_c^Y} = \frac{(e^{4c^3} - 1)c}{4(e^{2c^3} - 1)} > \frac{c}{4} \xrightarrow[c \to +\infty]{} +\infty.$$

Dunque V_c^X è definitivamente più grande di V_c^Y.

3. **(6 punti)** Si determini la soluzioni $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{(2-y)^2}{(4-y)y} = 0 \\ y(0) = -2\,. \end{cases}$$

È un'equazione non lineare del 1° ordine a variabili separabili.

Si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-y)^2}{(4-y)y} \Rightarrow \frac{(4-y)y}{(2-y)^2}\,dy = dx \Rightarrow \int \frac{(4-y)y}{(2-y)^2}\,dy = \int dx = x+k.$$

Nell'integrale in dy si ha

$$\int \frac{(4-y)y}{(2-y)^2}\,dy = \int \frac{4y-y^2}{(2-y)^2}\,dy = \int\left[\frac{4y-y^2-4}{(2-y)^2} + \frac{4}{(2-y)^2}\right]dy = \int\left(-1+\frac{4}{(2-y)^2}\right)dy =$$

$$= -y + \frac{4}{2-y}\,.$$

Quindi si è ottenuto $-y+\frac{4}{2-y} = x+k$, e imponendo il dato di Cauchy viene $-(-2)+\frac{4}{2-(-2)} = k$, cioè $k=3$.

Allora

[annullando il numeratore...]

$$-y+\frac{4}{2-y} = x+3 \Rightarrow \frac{4-(2-y)(y+x+3)}{2-y} = 0 \Rightarrow y^2+(x+3)y-2y-2(x+3)+4=0$$

$$\Rightarrow y^2+(x+1)y-2(x+1)=0 \Rightarrow y(x) = \frac{-(x+1)\mp\sqrt{(x+1)^2+8(x+1)}}{2}\,.$$

In conclusione (tenendo il segno $-$ davanti alla radice, altrimenti $y(0)\neq -2$ ...)

$$y(x) = \frac{-x-1-\sqrt{x^2+10x+9}}{2}\,.$$