ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2016

1. (6 punti) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin(2x^2)}{\log(\cos(2x)) + 2x^2}.$$

Si ha

$$\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \quad \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1,$$

quindi il numeratore, moltiplicando e dividendo, può essere sostituito da $\frac{1}{2}x^2 \cdot 2x^2 = x^4$.

Al denominatore, scriviamo $\log(\cos(2x)) = \log(1-(1-\cos(2x)))$.

Abbiamo $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, e $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ per $t \approx 0$,

per cui $1-\cos(2x) = \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$, e

$$\log(\cos(2x)) = -(1-\cos(2x)) - \frac{(1-\cos(2x))^2}{2} + \underbrace{o(x^4)} =$$

$$= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o(x^4) =$$

$$= -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4).$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-\cos(2x) \approx \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2 \\ (1-\cos(2x))^2 \approx 4x^4 \\ o((1-\cos(2x))^2) = o(x^4) \end{array}\right.$$

Dunque si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin(2x^2)}{\log(\cos(2x)) + 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\cancel{-2x^2} - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) + \cancel{2x^2}} = -\frac{3}{4}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2016

2. (6 punti) Determinare eventuali punti e valori di massimo assoluto e minimo assoluto, punti e valori di massimo relativo e minimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-4x^2+2x}}{x-1}.$$

La funzione non è definita per $x=1$, e si ha $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ (si tenga conto che $e^{-4x^2+2x} > 0$ per ogni x...).

Dunque la funzione f <u>non</u> ha né massimo assoluto né minimo assoluto.

Vediamo i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$. Siccome $-4x^2+2x = 2x(-2x+1)$, si ha $-4x^2+2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ e $-4x^2+2x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, per cui $e^{-4x^2+2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ e $e^{-4x^2+2x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. In conclusione, siccome $f(x)>0$ per $x>1$ e $f(x)<0$ per $x<1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$.

Calcoliamo $f'(x)$: si ha

$$f'(x) = \frac{e^{-4x^2+2x}(-8x+2)(x-1) - e^{-4x^2+2x}}{(x-1)^2} = \frac{e^{-4x^2+2x}}{(x-1)^2}(-8x^2+10x-3).$$

Quindi le radici di $8x^2-10x+3$ sono

$$x = \frac{5 \mp \sqrt{25-24}}{8} = \begin{cases} 1/2 \\ 3/4 \end{cases},$$

e $f'(x) > 0$ per $1/2 < x < 3/4$. Dunque f decresce per $x < 1/2$, cresce per $1/2 < x < 3/4$, decresce per $x > 3/4$. Si ha allora $1/2$ punto di minimo relativo, $3/4$ punto di massimo relativo.

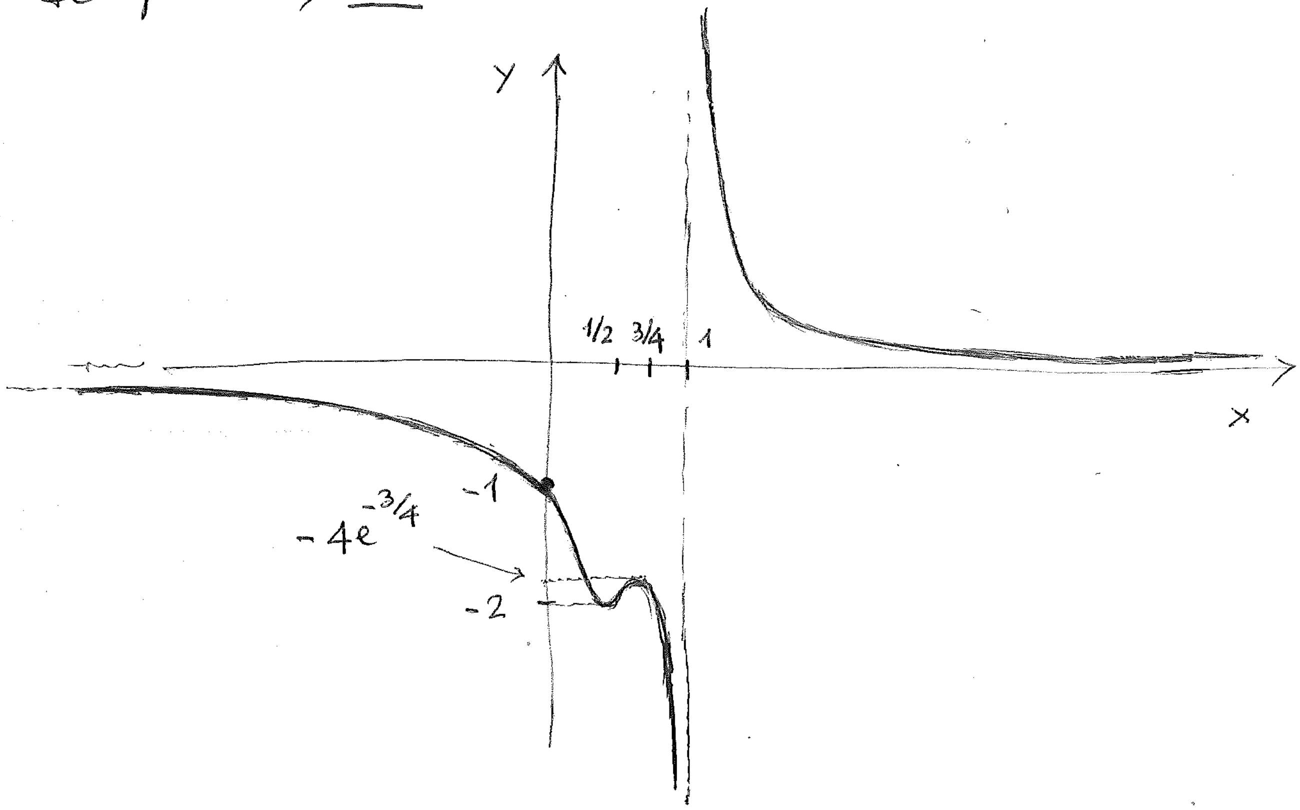
Calcolando, $f(1/2) = \frac{e^{-1+1}}{1/2-1} = -2$, $f(3/4) = \frac{e^{-4\,9/16+3/2}}{3/4-1} = \frac{e^{-3/4}}{-1/4} = -4e^{-3/4}$.

Il valore di minimo relativo è quindi -2, il valore di massimo relativo è $-4e^{-3/4}$.

2. (6 punti) Determinare eventuali punti e valori di massimo assoluto e minimo assoluto, punti e valori di massimo relativo e minimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-4x^2+2x}}{x-1}.$$

Il grafico, non richiesto, è



ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2016

3. (6 punti) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 5y = e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

È un'equazione lineare, del 1° ordine, non omogenea.

La formula risolutiva è

$$y(x) = e^{-\int_0^x 5dt}\left(1 + \int_0^x e^{+\int_0^s 5dt} e^{2s}\, ds\right) =$$

$$= e^{-5x}\left(1 + \int_0^x e^{5s} e^{2s}\, ds\right) = e^{-5x}\left(1 + \int_0^x e^{7s}\, ds\right) =$$

$$= e^{-5x}\left(1 + \frac{1}{7} e^{7s}\Big|_{s=0}^{s=x}\right) = e^{-5x}\left(1 + \frac{1}{7}e^{7x} - \frac{1}{7}\right) =$$

$$= \frac{6}{7} e^{-5x} + \frac{1}{7} e^{2x}.$$

Siccome $e^{-5x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ e $e^{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

L'equazione è a coefficienti costanti. Quindi la procedura che si utilizza per le equazioni lineari del 2° ordine a coefficienti costanti può essere adattata a questo caso.

Il polinomio associato è $r+5$, la cui radice è $r=-5$.

Dunque le soluzioni dell'omogenea sono $y_0(x) = ce^{-5x}$, $c \in \mathbb{R}$.

Dal metodo di somiglianza, una soluzione particolare è della forma $y_*(x) = Ae^{2x}$. Allora $y_*' = 2Ae^{2x}$, per cui si deve avere

$$y_*' + 5y_* = 2Ae^{2x} + 5Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 7A = 1, A = \frac{1}{7}.$$

Tutte le soluzioni della non-omogenea sono dunque

$$y(x) = ce^{-5x} + \frac{1}{7}e^{2x}.$$

Imponendo il dato di Cauchy $y(0)=1$ viene $c + \frac{1}{7} = 1$, cioè $c = \frac{6}{7}$.