ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2017

1. **(6 punti)** Determinare il polinomio di Taylor di quarto grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \tan(2x - x^2) + e^{x-x^3}.$$

Si ha, per $t \to 0$:

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} + o(w^4),$$

dunque con $t = 2x - x^2$ e $w = x - x^3$ ne segue

$$\tan(2x-x^2) = (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^3}{3} + \underbrace{o((2x-x^2)^4)}_{= o(x^4)} =$$

$$= 2x - x^2 + \frac{8x^3 - 3\cdot 4x^2\cdot x^2 + o(x^4)}{3} =$$

$$= 2x - x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x-x^3} = 1 + x - x^3 + \frac{(x-x^3)^2}{2} + \frac{(x-x^3)^3}{6} + \frac{(x-x^3)^4}{24} + \overbrace{o((x-x^3)^4)}^{= o(x^4)} =$$

$$= 1 + x - x^3 + \frac{x^2 - 2x^4 + o(x^4)}{2} + \frac{x^3 + o(x^4)}{6} + \frac{x^4 + o(x^4)}{24} =$$

$$= 1 + x - x^3 + \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

In totale

$$f(x) = \underbrace{1 + 3x - \frac{x^2}{2} + \frac{11}{6}x^3 - \frac{119}{24}x^4}_{= P_4(x)} + o(x^4)$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2017

2. (6 punti) Disegnare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(3x^2) & \text{per } x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{x} & \text{per } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} .$$

In particolare, determinare continuità, limiti all'infinito, eventuali asintoti obliqui, crescenza/decrescenza, convessità/concavità.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(3x^2) = \pi/2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Si ha anche facilmente $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

La continuità è verificata per ogni $x \neq 1/\sqrt{3}$ (compaiono tutte funzioni continue nei loro domini di definizione). Per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

si ha $\lim_{x\to(1/\sqrt{3})^-} f(x) = \operatorname{arctg}\left(3\,\frac{1}{3}\right) = \pi/4$, $\lim_{x\to(1/\sqrt{3})^+} f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{10}{3\sqrt{3}}$,

e dunque f <u>non</u> è continua in $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

A $+\infty$ ci può essere un asintoto obliquo: vediamo. Si ha

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$; $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Quindi $y = \frac{1}{3}x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$.

Per la crescenza calcoliamo f'. Per $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha $f'(x) = \frac{1}{1+(3x^2)^2} \cdot 6x =$

$= \frac{6x}{1+9x^4}$. Dunque f decresce per $x < 0$ e cresce per $0 < x < 1/\sqrt{3}$.

Per $x > 1/\sqrt{3}$ si ha $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-3}{3x^2}$, e quindi f cresce per $x^2 > 3$,

cioè $x > \sqrt{3}$, mentre decresce per $1/\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Si ha $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Per la convessità calcoliamo f''. Per $x < 1/\sqrt{3}$ si ha $f''(x) =$

$= 6 \cdot \frac{(1+9x^4 - x \cdot 36x^3)}{(1+9x^4)^2} = \frac{6}{(1+9x^4)^2}(1-27x^4)$, che è > 0 per $|x| < \frac{1}{3^{1/4}\sqrt{3}}$.

In quella zona f è convessa, per $x < -\frac{1}{3^{1/4}\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{3^{1/4}\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ la

f è concava.

Per $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha $f''(x) = +\frac{2}{x^3}$ (derivando $\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} \cdots$), per cui per f

è convessa.

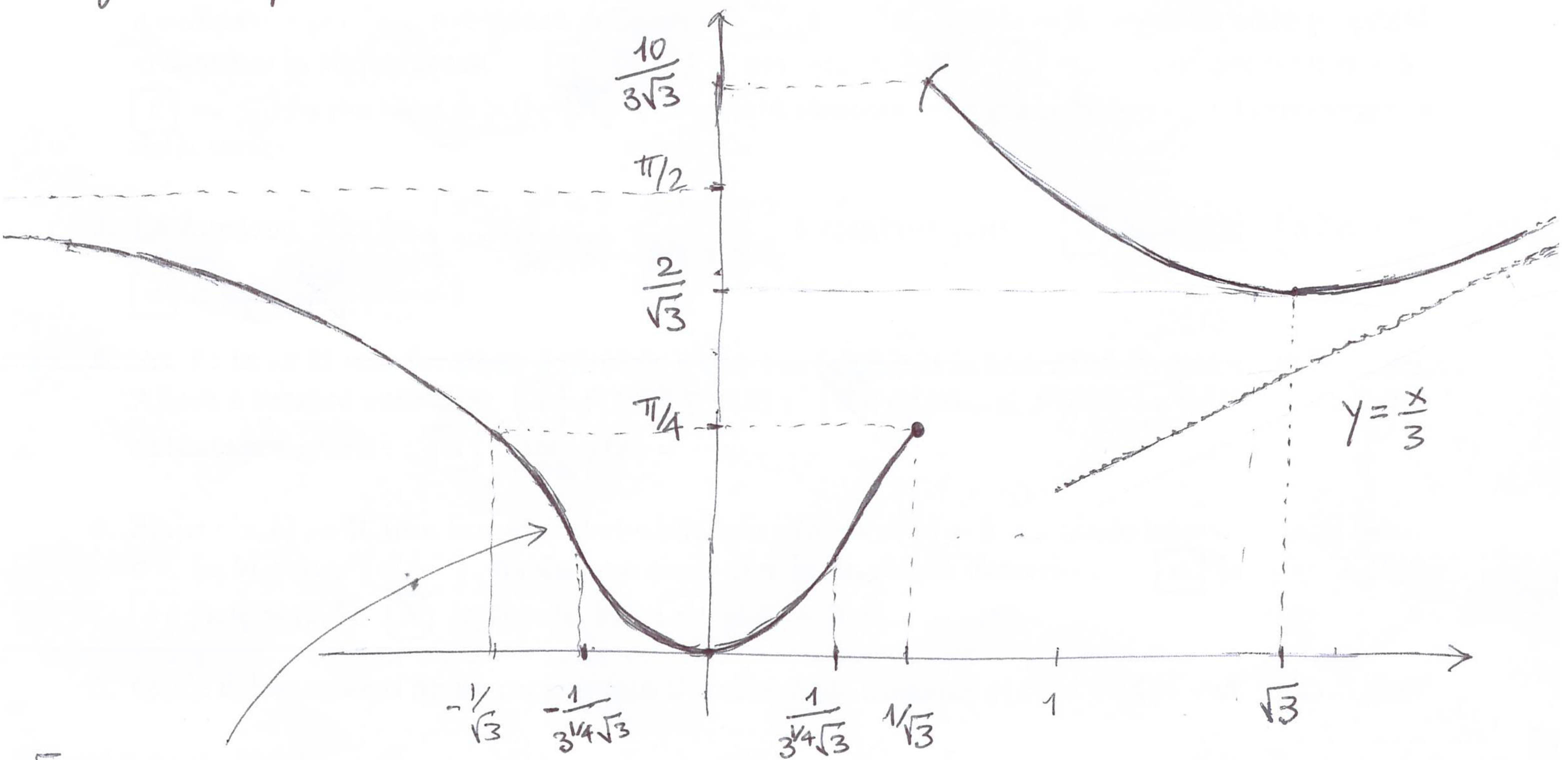
ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2017

2. (6 punti) Disegnare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(3x^2) & \text{per } x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{x} & \text{per } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} .$$

In particolare, determinare continuità, limiti all'infinito, eventuali asintoti obliqui, crescenza/decrescenza, convessità/concavità.

Grafico qualitativo.



Nell'intervallo $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ la funzione è pari.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello	5 settembre 2017

3. **(6 punti)** Determinare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$(y'-2)(y''+y'-6y-e^{-3x})=0$$

che soddisfano $y(0)=1$ e $y'(0)=2$.

L'equazione risulta soddisfatta se $y'-2=0$ oppure $y''+y'-6y-e^{-3x}=0$. Dal primo caso si ha $y=2x+c$, e dai dati di Cauchy viene $c=1$ (da $y(0)=1$; invece si vede che $y'(0)=2$ è soddisfatta per ogni $c\in\mathbb{R}$...).

Dunque una prima soluzione è $y(x)=2x+1$.

Dall'altro caso segue $y''+y'-6y=e^{-3x}$, un'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti costanti. Il polinomio associato è $\lambda^2+\lambda-6$, e le sue radici sono $r_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}-3\\2\end{cases}$. Dunque l'equazione omogenea ha soluzioni

$$y_0(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}.$$

Per trovare una soluzione particolare della non-omogenea provo con $y_*(x)=Axe^{-3x}$ (ci vuole il fattore $\underline{x}$, perché e^{-3x} è soluzione dell'omogenea!). Dunque imponendo l'equazione viene

$$y'=Ae^{-3x}-3Axe^{-3x},\quad y''=-3Ae^{-3x}-3Ae^{-3x}+9Axe^{-3x}$$

$$e^{-3x}=y''+y'-6y=-6Ae^{-3x}+\cancel{9Axe^{-3x}}+Ae^{-3x}-\cancel{3Axe^{-3x}}-\cancel{6Axe^{-3x}}=$$

$$=-5Ae^{-3x}\Rightarrow A=-1/5.$$

Tutte le soluzioni della non-omogenea sono dunque

$$y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}-1/5\,xe^{-3x},$$

e imponendo i dati di Cauchy viene (essendo $y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x}-\frac{1}{5}e^{-3x}+3/5\,xe^{-3x}$) $1=y(0)=c_1+c_2$, $2=y'(0)=-3c_1+2c_2-1/5$, cioè $c_1=1-c_2$, $2=-3(1-c_2)+2c_2-1/5=-3+5c_2-1/5\Rightarrow c_2=26/25\Rightarrow c_1=-\frac{1}{25}$.

L'altra soluzione è $y(x)=-\frac{1}{25}e^{-3x}+\frac{26}{25}e^{2x}-\frac{1}{5}xe^{-3x}$.