ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2019

1. (6 punti) Siano $P = \left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{k}{x^2+3x+2}\right\}$ e $Q = \left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin\frac{x}{4}\right\}$. Si determini il valore del parametro $k > 0$ per cui il volume del solido ottenuto ruotando P attorno all'asse y sia pari al doppio del volume ottenuto ruotando Q attorno all'asse x.

Si ha $\operatorname{vol}(P) = 2\pi \int_0^1 \frac{kx}{x^2+3x+2}\,dx$, $\operatorname{vol}(Q) = \pi \int_0^\pi \sin^2(x/4)\,dx$.

Eseguiamo i calcoli:

le radici di x^2+3x+2 sono -2 e -1

$$\operatorname{vol}(P) = 2\pi k \int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = 2\pi k \int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x+1)}\,dx.$$

Dobbiamo scrivere $\frac{x}{(x+2)(x+1)}$ come $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$. Si ha

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx+2B}{(x+2)(x+1)} \rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=0 \end{cases} \rightarrow 1-B+2B=0 \rightarrow B=-1,\ A=2.$$

Quindi

$$\operatorname{vol}(P) = 2\pi k \int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\pi k \left(2\log|x+2| - \log|x+1|\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi k\left(2\log 3 - 2\log 2 - \log 2\right) = 2\pi k(\log 9 - \log 8) = 2\pi k \log 9/8.$$

D'altra parte

$x/4 = t$, $dx = 4dt$, $x=0 \to t=0$, $x=\pi \to t=\pi/4$

$$\operatorname{vol}(Q) = \pi \int_0^\pi \sin^2(x/4)\,dx = \pi \int_0^{\pi/4} 4\sin^2 t\,dt \underset{\text{per parti}}{=} 4\pi\left[-\cos t \sin t\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\cos^2 t\,dt\right] =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{\sqrt2}{2}\frac{\sqrt2}{2} + \int_0^{\pi/4}(1-\sin^2 t)\,dt\right] = 4\pi\left[-1/2 + \pi/4 - \int_0^{\pi/4}\sin^2 t\,dt\right].$$

Si deduce quindi che (riportando $-\int_0^{\pi/4}\sin^2 t\,dt$ a sinistra ...)

$$\int_0^{\pi/4}\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \pi/4\right) = \pi/8 - 1/4 \Rightarrow \operatorname{vol}(Q) = 4\pi\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

In conclusione si deve imporre

$$2\pi k \log 9/8 = 2\cdot\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow k = \frac{\pi - 2}{2\log 9/8}.$$

2. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+2} & \text{per } x \le 0, x \neq -2 \\ \frac{x-2}{2+x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

(limiti all'infinito e agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti obliqui, eventuale non continuità in 0, crescenza/decrescenza, convessità/concavità).

Si ha $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-2}{2+x} = -1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$: discontinuità di salto in $x=0$. Anche : $f(2)=0$.

Poi si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{2+x} = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$. Verifichiamo se c'è un asintoto obliquo per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x(x+2)} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}\right) = -2.$$

Quindi $y = x-2$ è un asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

Ancora due limiti:

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty.$$

Vediamo le derivate: per $x>0$ si ha

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{2+x}\right)' = \frac{2+x-(x-2)}{(2+x)^2} = \frac{4}{(2+x)^2} > 0,$$ dunque f <u>crescente</u>.

$$f''(x) = \left(\frac{4}{(2+x)^2}\right)' = 4\cdot(-2)(2+x)^{-3} < 0,$$ dunque f <u>concava</u>.

Per $x<0$ (con $x\neq-2$) si ha:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} < 0 \text{ per } -4<x<0,\ x\neq-2.$$

Quindi f <u>decresce</u> per $-4<x<0$, <u>cresce</u> per $x<-4$. Si ha $f(-4) = \frac{16}{-4+2} = -8$.

Poi $$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^{\cancel{2}} - (x^2+4x)2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}} = 2\,\frac{\cancel{x^2}+\cancel{4x}+4-\cancel{x^2}-\cancel{4x}}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3},$$

che è >0 per $x+2>0$, cioè $x>-2$. Quindi f è <u>convessa</u> per $x>-2$, <u>concava</u> per $x<-2$.

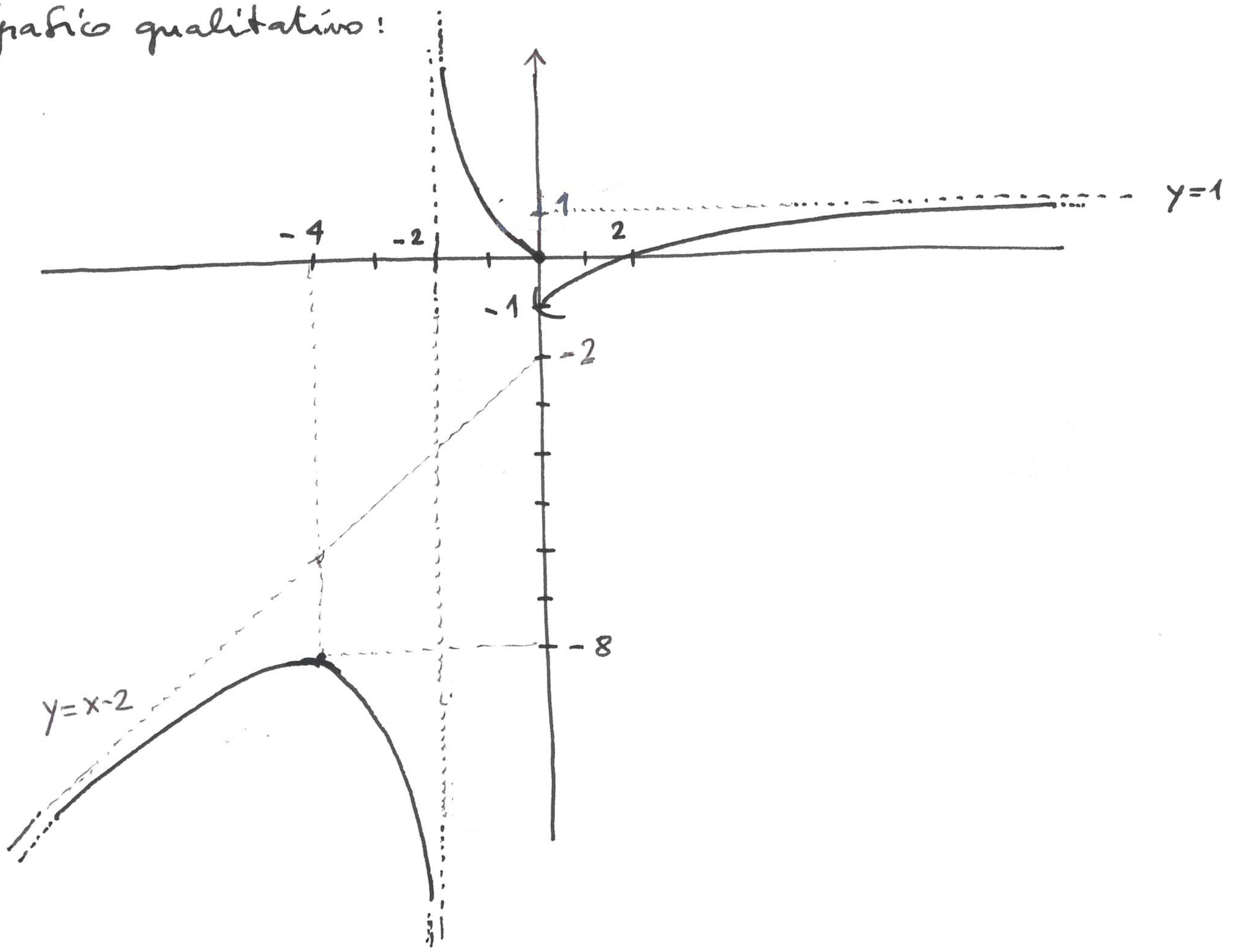
ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	8 gennaio 2019

2. (6 punti) Si disegni il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+2} & \text{per } x \leq 0, x \neq -2 \\ \frac{x-2}{2+x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

(limiti all'infinito e agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti obliqui, eventuale non continuità in 0, crescenza/decrescenza, convessità/concavità).

Grafico qualitativo:



3. (6 punti) Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{x^2-4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nell'intervallo $-2 < x < 2$.

Si tratta di un'equazione <u>non</u>-lineare del 1° ordine a variabili separabili. La possiamo riscrivere come (scrivendo $y' = \frac{dy}{dx}\dots$)

$$\frac{dy}{y^2-4} = \frac{dx}{x^2-4},$$

$$\begin{cases} Ay+By=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \to \begin{matrix} A=1/4 \\ B=-1/4 \end{matrix}$$

e integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^2-4} = \int \frac{dy}{(y-2)(y+2)} = \int \left(\frac{A}{y-2}+\frac{B}{y+2}\right)dy = \frac{1}{4}\int\frac{1}{y-2}dy - \frac{1}{4}\int\frac{1}{y+2}dy =$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + c_1.$$

Analogamente

$$\int\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c_2,$$

dal dato di Cauchy $y(0)=1\dots$

e dunque si è ottenuto

$$\frac{1}{4}\log\frac{|y-2|}{|y+2|} = \frac{1}{4}\log\frac{|x-2|}{|x+2|} + c \Rightarrow c = \frac{1}{4}\left(\log\frac{1}{3} - \log 1\right) = \frac{1}{4}\log\frac{1}{3}.$$

In conclusione

$$\frac{1}{4}\log\frac{|y-2|}{|y+2|} = \frac{1}{4}\log\frac{|x-2|}{|x+2|} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|y-2|}{|y+2|} = \frac{1}{3}\frac{|x-2|}{|x+2|} \overset{-2<x<2}{=} \frac{1}{3}\frac{2-x}{x+2}.$$

Siccome il dato di Cauchy di y è 1, per x vicino a 0 si ha y vicino a 1, dunque $|y-2| = 2-y$, $|y+2| = y+2$. Quindi si è ottenuto

$$\frac{2-y}{y+2} = \frac{1}{3}\frac{2-x}{x+2} \Rightarrow 2-y = \frac{1}{3}\frac{2-x}{x+2}y + \frac{2}{3}\frac{2-x}{x+2} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{3}\frac{2-x}{x+2}\right)y = 2-\frac{2}{3}\frac{2-x}{x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x+6+2-x}{3x+6}y = \frac{6x+12-4+2x}{3x+6} \Rightarrow y = \frac{8x+8}{2x+8} = 4\frac{x+1}{x+4}.$$