ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	9 gennaio 2020

1. **(6 punti)** Si determini il polinomio di Taylor di quarto grado con centro $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = e^{\sin(3x)}.$$

Si ha $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ e $\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^4)$,

per cui

$$e^{\sin(3x)} = 1 + 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4)\right)^4 =$$

$$= 1 + 3x - \cancel{\frac{9}{2}x^3} + o(x^4) + \frac{9x^2}{2} - \frac{27}{2}x^4 + \cancel{\frac{27}{6}x^3} + \frac{\cancel{81}^{27}}{\cancel{24}_{8}}x^4 =$$

$$= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 - 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{8}x^4 + o(x^4).$$

Dunque il polinomio di Taylor richiesto è

$$P_4(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{8}x^4.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	9 gennaio 2020

2. **(6 punti)** Dato $a > 0$, siano V_a^X e V_a^Y i volumi dei solidi di rotazione ottenuti facendo ruotare l'insieme

$$D_a = \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi\,,\ 0 \le y \le a\cos x\}$$

attorno all'asse X e all'asse Y, rispettivamente. Si determini il valore di $a > 0$ per cui $V_a^X = V_a^Y$.

Si ha $V_a^X = \pi \int_{3\pi/2}^{2\pi} a^2 \cos^2 x\, dx$, e

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = + \int_{3\pi/2}^{2\pi} (1 - \cos^2 x)\, dx = + \pi/2 - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^2 x\, dx,$$

per cui $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, e $V_a^X = \frac{\pi^2 a^2}{4}$.

Si ha inoltre $V_a^Y = 2\pi \int_{3\pi/2}^{2\pi} x\, a \cos x\, dx$, e

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} x \cos x\, dx = x \sin x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin x\, dx = \frac{3\pi}{2} + \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} + 1,$$

per cui $V_a^Y = 2\pi a \left(\frac{3\pi + 2}{2}\right) = \pi a (3\pi + 2)$.

Il valore $a > 0$ per cui $V_a^X = V_a^Y$ è dunque quello per cui

$$\frac{\pi^2 a^2}{4} = \pi a (3\pi + 2) \Rightarrow a = \frac{4(3\pi + 2)}{\pi}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	9 gennaio 2020

3. **(6 punti)** Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\sin(2y)}{\cos(2y)} 3x(1+x^2)^2 \\ y(0) = \pi/6\,. \end{cases}$$

È un'equazione del 1° ordine, non-lineare, a variabili separabili. Si ha

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(2y)}{\cos(2y)}\, 3x(1+x^2)^2,$$

cioè

$$\frac{\cos(2y)}{\operatorname{sen}(2y)}\, dy = 3x(1+x^2)^2 dx \Rightarrow \int \frac{\cos(2y)}{\operatorname{sen}(2y)}\, dy = \int 3x(1+x^2)^2 dx.$$

Si ha

$$\int \frac{\cos(2y)}{\operatorname{sen}(2y)}\, dy \underset{\operatorname{sen}(2y)=t\,\dots}{=} \frac{1}{2}\log|\sin(2y)| + c_1, \quad \int 3x(1+x^2)^2 dx \underset{1+x^2=t\,\dots}{=} (1+x^2)^3 \frac{1}{2} + c_2,$$

dunque

$$\frac{1}{2}\log|\sin(2y)| = \frac{1}{2}(1+x^2)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo il dato di Cauchy viene $\sin(2y(0)) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$, per cui $\sin(2y) > 0$ per x vicino a 0. Dunque

$$\frac{1}{2}\log(\sqrt{3}/2) = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}/2) - \frac{1}{2}.$$

Si è quindi ottenuto

$$\frac{1}{2}\log(\underbrace{\sin(2y)}_{>0 \text{ per } x \text{ vicino a } 0\dots}) = \frac{1}{2}(1+x^2)^3 + \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}/2) - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\sin(2y)) = (1+x^2)^3 + \log(\sqrt{3}/2) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2y) = e^{(1+x^2)^3}\sqrt{3}/2\, e^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2e} e^{(1+x^2)^3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2e} e^{(1+x^2)^3}\right).$$