Filtri

1 Sistemi Lineari

In questo paragrafo introdurremo molto brevemente la teoria matematica dei sistemi lineari. Scopo di queste pagine è di presentare alcune delle più significative applicazioni delle trasformazioni di Fourier e di Laplace, illustrando un punto di vista ed un linguaggio tipico di fisici ed ingegneri. Queste applicazioni hanno non solo interesse in se stesse, ma possono anche offrire un campo di prova per le trasformazioni integrali, e quindi contribuire ad una loro migliore comprensione.

Definiremo le principali proprietà dei sistemi lineari: invarianza temporale, causalità, stabilità; caratterizzeremo tali proprietà in termini della risposta agli impulsi unitari, ed illustreremo l'uso delle trasformazioni di Fourier e di Laplace. Vedremo anche come l'azione di un'importante classe di sistemi (detti filtri) si possa caratterizzare in tempo mediante la convoluzione con la risposta ad un impulso unitario; in frequenza questo corrisponderà al prodotto degli spettri. Vedremo come si possono comporre i filtri in serie, parallelo e retroazione. Concluderemo con alcuni sviluppi analitici volti a chiarire il ruolo delle funzioni esponenziali nelle trasformazioni integrali.

Queste pagine sono una rielaborazione di note originariamente rivolte agli studenti di ingegneria delle telecomunicazioni, e quindi non sono particolarmente esigenti per quanto riguarda il rigore matematico.

Sistemi. La nozione di *sistema* compare in diversi ambiti: fisica, ingegneria, biologia, economia, ecc.

Considereremo un *sistema unidimensionale* (ovvero un sistema ad ingresso scalare ed uscita scalare) [1] che trasforma un *segnale analogico* [2] $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ di ingresso (detto input o sollecitazione) in un segnale analogico $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ di uscita (detto output o risposta). Si distinguono sistemi discreti e sistemi analogici; per i primi ingresso ed uscita sono parametrizzati da $n \in \mathbf{Z}$, per i secondi da $t \in \mathbf{R}$. Si distinguono pure sistemi deterministici e sistemi stocastici, a secondo che la risposta sia univocamente determinata o meno dalla sollecitazione. Qui ci limiteremo a considerare sistemi analogici deterministici.

I segnali d'ingresso e di uscita saranno vincolati ad appartenere ad opportuni spazi lineari su $\mathbf{C}$ di funzioni, Φ ed Ψ; Φ sarà anche denominato *insieme degli input ammissibili.* Al sistema risulterà associato un operatore lineare $L : \Phi \to \Psi : f \mapsto g$, che possiamo anche identificare col sistema stesso. [3] Nei casi che considereremo, Φ ed Ψ includeranno spesso degli spazi L^p, con $p \in [1, \infty]$ ($p = 1, 2, \infty$ nei casi più tipici).

Saremo particolarmente interessati al caso di $\Phi = L^1$ esteso alle funzioni impulsive, ovvero le distribuzioni della forma

$$T = \sum_{n=0}^{m} a_n \delta(\cdot - t_n) \qquad \text{con } a_1, ..., a_m \in \mathbf{C}, t_1, ..., t_m \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}.$$

Potremmo considerare lo spazio delle misure di Borel finite su $\mathbf{R}$, che è identificabile con il duale topologico delle funzioni continue a supporto compatto.

Comunque per diversi risultati ci basterà arricchire L^1 della massa di Dirac nell'origine, e questo può essere conseguito mediante la seguente costruzione. Definiamo somma e convoluzione in $L^1 \times \mathbf{C}$

[1] Quindi un sistema di tipo SISO (ovvero, *single input single output).* Esistono anche quelli di tipo MIMO (ovvero, *multiple input multiple output).*

[2] La teoria dei sistemi trova una delle sue applicazioni più rilevanti nella teoria dei segnali, del cui linguaggio faremo occasionalmente uso. Dicesi *segnale* una funzione del tempo che rappresenta l'evoluzione di una quantità fisica.

[3] Qui la L sta per "lineare"; questa L non va confusa con quella degli L^p, e nemmeno con quella della trasformazione di Laplace. La linearità sarà richiesta per tutti i sistemi che qui considereremo.

come segue:

$$\begin{aligned} &(f_1, c_1) + (f_2, c_2) = (f_1 + f_2, c_1 + c_2) \\ &(f_1, c_1) * (f_2, c_2) = (f_1 * f_2 + c_1 f_2 + c_2 f_1, c_1 c_2) \end{aligned} \qquad \forall (f_1, c_1), (f_2, c_2) \in L^1 \times \mathbf{C}. \tag{1.1}$$

Scrivendo poi $f + c\delta$ invece di $(f, c) \in L^1 \times \mathbf{C}$, ritroviamo le usuali regole della convoluzione delle distribuzioni: $\delta * \delta = \delta$ e $f * \delta = f$ per ogni $f \in L^1$.

Linearità. Un sistema è detto *lineare* se

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 L(f_1) + a_2 L(f_2) \qquad \forall f_1, f_2 \in \Phi, \forall a_1, a_2 \in \mathbf{C}; \tag{1.2}$$

in particolare questo significa che amplificando un segnale in ingresso quello in uscita risulta amplificato per lo stesso fattore, e che sovrapponendo gli ingressi si sovrappongono le uscite.

La formula (1.2) implica un'analoga proprietà per le combinazioni lineari finite

$$L\bigg(\sum_{i=1}^{N} a_i f_i\bigg) = \sum_{i=1}^{N} L(a_i f_i) \qquad \forall f_1, ..., f_N \in \Phi, \forall a_1 ..., a_N \in \mathbf{C}, \forall N \in \mathbf{N}, \tag{1.3}$$

ma a priori non è detto che valga per le combinazioni lineari infinite, né per gli integrali. Comunque negli sviluppi seguenti assumeremo che la linearità sussista anche in tal caso, ovvero

$$L\bigg(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\bigg) = \sum_{i=1}^{\infty} L(a_i f_i), \qquad L\bigg(\int_\alpha^\beta a_s f_s \, ds\bigg) = \int_\alpha^\beta a_s L(f_s) \, ds, \tag{1.4}$$

per ogni successione $\{a_i\}$ e ogni funzione $[\alpha, \beta] \to \Phi : s \mapsto f_s$ tali che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ e l'integrale $\int_\alpha^\beta a_s f_s \, ds$ convergano. A questo scopo la limitatezza dell'operatore giocherà un ruolo importante; si pensi ad esempio al classico teorema di Lebesgue della convergenza dominata per il passaggio al limite nell'integrale.

Esempi. Vari sistemi lineari sono studiati in fisica ed ingegneria:

— gli amplificatori, che corrispondono ad $L(f) = Af$, il fattore di amplificazione A essendo reale e positivo; essi sono detti amplificatori in senso stretto se $A > 1$, attenuatori se $A < 1$,

— i derivatori, che sono caratterizzati da $L(f) = f'$,

— i circuiti RLC, [4] che sono ottenuti combinando in serie e/o in parallelo resistori, induttori, condensatori ed un generatore elettrico; questi sono caratterizzati da un'ODE della forma

$$L y''(t) + R y'(t) + \frac{y(t)}{C} = f(t), \tag{1.5}$$

ove con y si denota la carica, con f la tensione applicata, con L l'induttanza, con R la resistenza, con C la capacitanza.

— i circuiti con ritardo, che sono caratterizzati da $L(f) = f_\tau$ (ove $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$) per un $\tau > 0$ fissato,

— i sistemi unidimensionali massa, molla, smorzatore.

Sono invece non lineari ad esempio:

— i sistemi caratterizzati da una relazione $[L(f)](t) = \varphi(f(t))$, con $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ non lineare,

— i sistemi ottenuti componendo un sistema lineare con uno non lineare (più avanti vedremo che i sistemi possono essere combinati in diversi modi).

[4] Occasionalmente faremo riferimento alla teoria dei circuiti elettrici *passivi,* ovvero che non generano energia.

Invarianza Temporale. Si definisca il segnale traslato

$$f_\tau : t \mapsto f(t-\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}, \forall f \in \Phi. \tag{1.6}$$

Un sistema L è detto *invariante nel tempo* (o *tempo-invariante* o addirittura *stazionario)* se

$$f_\tau \in \Phi, \qquad L(f_\tau) = L(f)_\tau \qquad \forall f \in \Phi, \forall \tau \in \mathbf{R}; \tag{1.7}$$

ovvero il dominio Φ è stabile per traslazioni, e la risposta al segnale traslato coincide con il traslato della risposta. Questo è il caso, ad esempio, dei sistemi rappresentati da equazioni differenziali *autonome* (ovvero, con coefficienti costanti). Tutti gli esempi di sistemi lineari sopra indicati sono invarianti nel tempo.

Causalità. Un sistema L è detto *causale* se

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \forall t < \tau \quad \Rightarrow \quad (Lf_1)(t) = (Lf_2)(t) \quad \forall t < \tau \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}, \forall f_1, f_2 \in \Phi; \tag{1.8}$$

ovvero se e solo se

$$f(t) = 0 \quad \forall t < \tau \quad \Rightarrow \quad (Lf)(t) = 0 \quad \forall t < \tau \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}, \forall f \in \Phi. \tag{1.9}$$

Un segnale $f(t)$ invece si dice causale se $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$.

Tutti i sistemi fisicamente realizzabili sono causali.

Realtà. Un sistema L è detto *reale* se trasforma segnali reali in segnali reali, ovvero per ogni $f \in \Phi$

$$f(t) \in \mathbf{R} \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad (Lf)(t) \in \mathbf{R} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Gli amplificatori, i derivatori e i circuiti con ritardo sono sistemi reali; i circuiti RLC lo sono se $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Stabilità. Sia $p \in [1, +\infty]$. Un sistema $L : \Phi \to \Phi$ è detto *stabile in* L^p (o *p-stabile)* [5] se $L : \Phi \cap L^p \to L^p$ ed esiste una costante $C_p > 0$ tale che

$$\|Lf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \qquad \forall f \in \Phi \cap L^p.$$

In particolare, per $p = \infty$ si parla di stabilità di tipo BIBO (ovvero, *bounded input bounded output).*

(Si parla anche di *stabilità asintotica* quando la risposta del sistema tende a 0 per $t \to +\infty$.)

Gli amplificatori, i circuiti con ritardo e i circuiti RLC sono stabili, mentre i derivatori non lo sono.

Un sistema può avere anche altre proprietà. Ad esempio, si dice che un sistema è *invertibile* se l'operatore L è invertibile. Si dice che un sistema è *istantaneo* (ovvero privo di memoria) se ad ogni istante $L(f)$ dipende solo dal valore di f allo stesso istante (ad esempio questo non è il caso per i derivatori). Un sistema privo di memoria è caratterizzato da un operatore della forma $[L(f)](t) = \varphi(f(t))$, con $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Gli amplificatori sono gli unici sistemi lineari privi di memoria.

Risposta all'Impulso. Nel seguito ci limiteremo a considerare sistemi *lineari,* e supporremo sistematicamente che L sia definito anche per funzioni impulsive.

[5] In matematica il termine *stabilità* ha vari significati. In questo caso gli analisti dicono che L è un operatore *limitato* in L^p. Naturalmente la nozione di stabilità può essere estesa a spazi funzionali più generali, purché dotati di una metrica.

Proposizione 1.1. *Sia L un sistema lineare definito anche per funzioni impulsive, e si definisca la risposta $\bar h$ del sistema all'impulso unitario traslato δ_τ:*

$$\bar h(t,\tau) := [L(\delta(\cdot - \tau))](t) \qquad \textit{per } t,\tau \in \mathbf{R}. \tag{1.11}$$

Allora

$$[L(f)](t) = \int_{\mathbf{R}} f(\tau)\bar h(t,\tau)\, d\tau \qquad \textit{per } t \in \mathbf{R}, \forall f \in \Phi \cap C^0. \tag{1.12}$$

Pertanto la funzione $\bar h$ caratterizza completamente l'operatore L.

L'integrale che compare nella (1.14) è una convoluzione in senso stretto se $\bar h(t,\tau)$ dipende solo da $t-\tau$. Altrimenti è un funzionale più generale, che alcuni chiamano una *convoluzione di Volterra.*

Dimostrazione. Per ogni funzione continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ abbiamo [6]

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}} f(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau =: (f*\delta)(t) \qquad \text{per } t \in \mathbf{R}. \tag{1.13}$$

Quindi, supponendo che la linearità valga anche per i segnali impulsivi e per gli integrali,

$$[L(f)](t) = \int_{\mathbf{R}} f(\tau)[L(\delta(\cdot - \tau))](t)\, d\tau = \int_{\mathbf{R}} f(\tau)\bar h(t,\tau)\, d\tau \qquad \text{per } t \in \mathbf{R}. \tag{1.14}$$

Se f è discontinua la (1.14) perde significato. Occorre allora approssimare f con una successione $\{f_n\}$ di funzioni continue, e passare al limite nella formula (1.14) relativa ad n. Naturalmente questo fornisce la stessa formula solo se $\int_{\mathbf{R}} f_n(\tau)\bar h(t,\tau)\, d\tau \to \int_{\mathbf{R}} f(\tau)\bar h(t,\tau)\, d\tau$. $\square$

Useremo la formula (1.14) più in generale per ogni $f \in \Phi$ tale che l'integrale che ivi compare abbia senso, eventualmente inteso come prodotto di dualità. [7]

Ad esempio, per ogni $s \in \mathbf{R}$ la risposta al gradino unitario traslato $\widetilde H_s := \widetilde H(\cdot - s)$ [8] è

$$k(t,s) := [L(\widetilde H_s)](t) = \int_{\mathbf{R}} \widetilde H_s(\tau)\bar h(t,\tau)\, d\tau = \int_s^{+\infty} \bar h(t,\tau)\, d\tau \qquad \text{per } t \in \mathbf{R}. \tag{1.15}$$

I due prossimi teoremi caratterizzano le principali proprietà dei sistemi lineari in termini della risposta all'impulso unitario traslato.

Teorema 1.2. *Sia L un sistema lineare definito anche per funzioni impulsive, e caratterizzato dalla risposta $\bar h(t,\tau)$ all'impulso unitario traslato, cf. (1.11). Allora:*

(i) L è invariante nel tempo se e solo se

$$\bar h(t,\tau) = \bar h(t-\tau, 0) \qquad \textit{per } t,\tau \in \mathbf{R}; \tag{1.16}$$

ovvero, se e solo se la proprietà di tempo-invarianza (1.7) vale per gli impulsi unitari traslati. [9] *In tal caso definiamo la risposta all'impulso unitario non traslato (detta anche* risposta impulsiva *tout court)*

$$h(t) := \bar h(t,0) \ \big(= [L(\delta)](t)\big) \qquad \textit{per } t \in \mathbf{R}. \tag{1.17}$$

[6] La delta di Dirac δ e le sue traslate saranno le sole distribuzioni a cui qui faremo riferimento. Per esse useremo la notazione integrale, che è un po' più suggestiva del prodotto di dualità.

[7] L'operatore L potrebbe essere definito solo per funzioni definite quasi ovunque, ed allora l'ultima uguaglianza varrebbe solo quasi ovunque in $\mathbf{R}$.

[8] Denoteremo con $\widetilde H$ la funzione di Heaviside, in modo da riservare la notazione H ad altri scopi.

[9] Si può dimostrare che in questo caso pure la risposta k al gradino unitario non traslato $\widetilde H$ caratterizza l'operatore L.

(ii) L è causale se e solo se $\bar{h}(t,\tau) = 0$ per ogni $t < \tau$; ovvero, se e solo se la proprietà di causalità (1.9) vale per ogni impulso unitario traslato.

(iii) L è reale se e solo se $\bar{h}(t,\tau) \in \mathbf{R}$ per ogni $t, \tau \in \mathbf{R}$; ovvero, se e solo se è reale la risposta ad ogni impulso unitario traslato.

In seguito alla proprietà (i), se L è un sistema lineare e invariante nel tempo, allora nelle affermazioni (ii) e (iii) si può sostituire $\bar{h}(t,\tau)$ con $h(t-\tau)$.

*** Dimostrazione.** (i) Per mostrare la parte "solo se", basta applicare L all'impulso unitario traslato. Verifichiamo ora il viceversa. Posto $f_\sigma := f(\cdot - \sigma)$ per ogni $\sigma \in \mathbf{R}$, utilizzando la (1.14) e cambiando la variabile di integrazione abbiamo

$$\begin{aligned} [L(f_\sigma)](t) &= \int_{\mathbf{R}} f_\sigma(\tau)\bar{h}(t,\tau)\,d\tau \overset{(1.16)}{=} \int_{\mathbf{R}} f_\sigma(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(\tau-\sigma)h_\sigma(t-\tau+\sigma)\,d\tau \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(s)h_\sigma(t-s)\,ds = [L(f)]_\sigma(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

(ii) Poiché $\delta_\tau(t) = 0$ per ogni $t < \tau$ e $\bar{h}(t,\tau) = [L(\delta_\tau)](t)$ per ogni t, τ, la parte "solo se" vale. Per verificare il viceversa, si fissi un $\tilde{\tau} \in \mathbf{R}$ qualsiasi, e si supponga $f(\tau) = 0$ per ogni $\tau < \tilde{\tau}$. Se $\bar{h}(t,\tau) = 0$ per ogni $t < \tau$, allora l'integrando della (1.14) può essere non nullo solo se $\tilde{\tau} \le \tau \le t$; quindi l'integrale è nullo se $t < \tilde{\tau}$.

(iii) Questa facile verifica è lasciata al lettore. □

Sia L un sistema lineare causale e definito anche per funzioni impulsive; in seguito al punto (ii) del Teorema 1.2, per ogni input ammissibile f la (1.14) si riscrive

$$[L(f)](t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\bar{h}(t,\tau)\,d\tau \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.19}$$

Quindi l'output associato ad un generico istante t non dipende dall'input agli istanti successivi; ciò ben corrisponde al concetto di causalità.

Teorema 1.3. *Sia L un sistema lineare, invariante nel tempo, definito anche per funzioni impulsive, e caratterizzato dalla risposta impulsiva $h := L(\delta)$. Allora, per ogni $p \in [1, +\infty]$, L è stabile in L^p se e solo se $h \in L^1$.*

Dimostrazione Parziale. Se L è invariante nel tempo allora come si è visto $\bar{h}(t,\tau) = \bar{h}(t-\tau, 0)$ $(=: h(t-\tau))$; la (1.14) diventa quindi una convoluzione:

$$[L(f)](t) = \int_{\mathbf{R}} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = (f * h)(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{1.20}$$

La parte "se" allora discende dalle note proprietà della convoluzione. Il viceversa è un po' più delicato da dimostrare. □

Quest'ultimo teorema implica che, per ogni $p, q \in [1, +\infty]$, un sistema invariante nel tempo è stabile in L^p se e solo se è stabile in L^q. Questo consente di parlare di stabilità tout court.

Teorema 1.4. *Sia L un sistema lineare, stabile e definito anche per funzioni impulsive. Allora L è invariante nel tempo se e solo se*

$$L(f) = L(\delta) * f \qquad \textit{per ogni input ammissibile } f. \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Per un sistema lineare stabile ed invariante nel tempo L, la (1.14) diventa

$$L : f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = (f * h)(t) = (f * L(\delta))(t). \tag{1.22}$$

Il viceversa è ovvio. □

Filtri. Denomineremo *filtro* un sistema lineare, stabile, invariante nel tempo, definito anche per funzioni impulsive. I filtri causali sono effettivamente realizzabili. Come abbiamo visto, un filtro è causale (reale, resp.) se e solo se la risposta impulsiva $h := L(\delta)$ è causale (reale, resp.). Ad esempio i circuiti RLC soddisfano queste ipotesi.

Sono esempi di filtri gli amplificatori, i circuiti RLC, i circuiti con ritardo, i derivatori, ed altri.

Tra i filtri più tipici vi sono quelli che selezionano delle frequenze. In ingegneria il termine *filtro* è spesso riferito ai relativi dispositivi elettronici, quali i filtri passa-basso, passa-alto, passa-banda, ecc.; questi selezionano una gamma di frequenze rispettivamente basse, alte, di una banda prescritta.

Sistemi di convoluzione. Per via della rappresentazione (1.22), i filtri sono anche detti *sistemi di convoluzione.*

Anche se qui ci limiteremo a considerare sistemi definiti anche per funzioni impulsive, un sistema di convoluzione può anche essere definito solo per funzioni di L^p. Basta fissare una funzione $h \in L^1$ (ad esempio), e porre $L(f) = h*f$ per ogni input ammissibile $f \in L^1$.

2 La Funzione di Trasferimento

In questo paragrafo riformuleremo alcune importanti proprietà dei filtri mediante la trasformazione di Fourier $\mathcal{F}$, ed illustreremo come i filtri si possano comporre in parallelo, in cascata ed in retroazione.

Si consideri un filtro rappresentato dall'operatore L. Come si è visto, L è caratterizzato dalla risposta impulsiva $h := L(\delta)$; inoltre $h \in L^1$ per il Teorema 1.3. Poiché

$$L(f) = L(\delta)*f \qquad \text{per ogni input ammissibile } f,$$

$L(\delta)$ è anche detta la *funzione di trasferimento* del sistema [10] (o la *funzione del sistema)* in tempo. Dal momento che $\mathcal{F} : L^1 \to C^0_b$, ha senso definire la *risposta in frequenza* del sistema L:

$$H(\omega) := [\mathcal{F}(h)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

e questo segnale è appunto limitato e continuo. La H è anche detta la *funzione di trasferimento* del sistema [11] (o la *funzione del sistema)* in frequenza, o anche lo *spettro* del sistema. [12] Indicando con $R(\omega)$ ($X(\omega)$, risp.) la parte reale (immaginaria, risp.) di $H(\omega)$, con $A(\omega)$ il suo modulo, e con $\varphi(\omega)$ la sua fase, ovviamente abbiamo

$$H(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.2}$$

Le funzioni A e φ (ovvero l'ampiezza e la fase dello spettro) sono rispettivamente denominate *spettro di ampiezza* e *spettro di fase* del sistema. Se L è reale, le funzioni R e A sono pari, mentre X

[10] Questa funzione è detta di trasferimento perché permette di trasformare (trasferire...) un qualsiasi input nell'ouput corrispondente.

[11] Nel seguito la notazione H non avrà nulla a che vedere con la funzione di Heaviside!

[12] Analogamente, la trasformata di Fourier di un segnale è detta il suo spettro. L'uso dello stesso termine spettro sia per il sistema che per il segnale è naturale: come vedremo col teorema fondamentale, il ruolo del sistema finisce con essere confrontabile con quello del segnale di ingresso.

e φ sono dispari. Se il filtro è causale nella (2.1) l'integrale su $\mathbf{R}$ può ovviamente essere sostituito da quello su $\mathbf{R}^+$. Applicando la trasformazione di Fourier inversa, formalmente si ha [13]

$$h(t) = [\mathcal{F}^{-1}(H)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} H(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Osservazione. La funzione H non è soggetta ad alcuna restrizione, a parte la regolarità che le compete in quanto funzione trasformata. In altri termini, per ogni funzione H appartenente al codominio della trasformazione di Fourier, si può concepire (e progettare!) un filtro L che ha quella H come funzione di trasferimento (in frequenza). Lo stesso vale per la funzione di trasferimento nel tempo. Questo discorso può essere esteso alla trasformazione di Laplace, che, come si è visto, può essere considerata come una schiera di trasformazioni di Fourier; i filtri corrispondenti sono causali.

Teorema 2.1. *(Teorema Fondamentale dei Filtri) Sia L un filtro caratterizzato dalla risposta impulsiva $h := L(\delta)$, e sia $f \in L^1$ un input ammissibile. Posto $g := L(f)$, le trasformate di Fourier $F := \mathcal{F}(f)$, $G := \mathcal{F}(g)$, $H := \mathcal{F}(h)$ sono elementi di C^0_b. Inoltre* [14]

$$G(\omega) = \sqrt{2\pi} H(\omega)\, F(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. In seguito alla stabilità di L ed al Teorema 1.3, $g, h \in L^1$. Ha quindi senso applicare la trasformazione di Fourier a queste funzioni. Poiché $g = f * h$, cf. (1.22), la (2.3) discende dal noto teorema sulla trasformazione di Fourier della convoluzione. □

Le (2.3) ovviamente implica

$$|G(\omega)|^2 = 2\pi |H(\omega)|^2\, |F(\omega)|^2 \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.4}$$

Il Teorema 2.1 si estende anche a funzioni $f \in L^2$, che è uno spazio particolarmente adatto per l'uso della trasformazione di Fourier e della sua inversa; in tal caso (2.3) e (2.4) valgono solo per quasi ogni $\omega \in \mathbf{R}$.

La simmetria con cui segnale e filtro compaiono nelle (2.3) e (2.4) permette di trattarli ponendoli su uno stesso piano. [15]

Energia e potenza dei segnali. Se $f(t)$ è la densità di corrente che attraversa all'istante t un filo conduttore di resistenza unitaria, allora $|f(t)|^2$ è pari alla potenza dissipata dal segnale f all'istante t. Il suo integrale su un intervallo temporale rappresenta quindi l'energia dissipata dal segnale in quell'intervallo; il suo integrale su $\mathbf{R}$, pari a $\|f\|^2_{L^2}$, è quindi uguale all'energia totale dissipata.

Il fatto che l'energia sia ripartita nel tempo con densità temporale $|f(t)|^2$ induce a pensare che analogamente l'energia possa essere ripartita in frequenza con densità frequenziale $|F(\omega)|^2$; quest'ultima funzione è anche detta lo *spettro di potenza* del segnale. $|F(\omega)|^2$ è quindi interpretato come densità dell'energia dissipata dal segnale alla frequenza ω. Ovviamente l'energia totale dissipata in tempo coincide con quella in frequenza: $\|f\|^2_{L^2} = \|F\|^2_{L^2}$, come prescritto dal teorema di Plancherel.

Per via della (2.4), $2\pi |H(\omega)|^2$ è quindi detta la *funzione di trasferimento dell'energia* (in frequenza). In seguito a queste definizioni, la (2.4) può essere così interpretata: ad ogni frequenza, lo spettro di

[13] A differenza di (2.1), quest'ultimo integrale non è da intendersi nel senso di Lebesgue, poiché non è detto che sia $H \in L^1$: qui occorrerebbe fare riferimento alla trasformazione di Fourier nell'ambito delle distribuzioni.

[14] Nella letteratura sulla teoria dei sistemi questa formula compare senza il fattore $\sqrt{2\pi}$, per via della diversa definizione della trasformazione di Fourier. Naturalmente troveremo fattori di quel tipo anche in altre formule contenti funzioni trasformate.

[15] Questo è particolarmente significativo, e può forse aiutare a capire perché si usi il termine *causale* per i segnali nulli per tempi negativi, in analogia alla terminologia adottata per i sistemi invarianti nel tempo.

potenza della risposta è uguale al prodotto tra la funzione di trasferimento dell'energia e lo spettro di potenza dell'ingresso. (Si noti come qui segnale di ingresso e sistema giocano ruoli analoghi.)

Nel caso di f periodica (di periodo 1, ad esempio) occorre ricorrere alla teoria delle distribuzioni, poiché $f \notin L^1$ (a meno che $f \equiv 0$); inoltre, come noto, un tale segnale ha uno spettro a righe. Se f è integrabile nell'intervallo $]0,1[$, le (2.3) e (2.4) forniscono [16]

$$G(k) = \sqrt{2\pi} H(k) F(k) \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \qquad G(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \tag{2.5}$$

$$|G(k)|^2 = 2\pi |H(k)|^2 |F(k)|^2 \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \qquad |G(\omega)|^2 = 0 \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}. \tag{2.6}$$

Quindi in questo caso anche lo spettro di potenza della risposta e la funzione di trasferimento dell'energia sono a righe.

Nel caso di filtri causali, analoghe conclusioni possono essere tratte applicando la trasformazione di Laplace piuttosto che quella di Fourier.

Composizione di Filtri. Siano L_1 ed L_2 due filtri (che agiscono in modo tra loro indipendente) definiti su uno stesso dominio Φ, caratterizzati dalle rispettive risposte impulsive h_1 e h_2, e sia $f \in L^1$ un input ammissibile. Si ponga

$$g_i := L_i(f), \quad F := \mathcal{F}(f), \quad H_i := \mathcal{F}(h_i), \quad G_i := \mathcal{F}(g_i) \quad (i = 1, 2). \tag{2.7}$$

I filtri L_1 ed L_2 possono essere composti secondo le seguenti tre disposizioni fondamentali:

(i) Connessione in Parallelo. Se L_1 e L_2 sono definiti su uno stesso dominio Φ e sono connessi in parallelo, allora il sistema composto L è definito sullo stesso dominio Φ, e si ha

$$L : f \mapsto g = L_1(f) + L_2(f) \qquad \forall f \in \Phi.$$

Quindi L è caratterizzato dalle seguenti risposte in tempo ed in frequenza:

$$g(t) = [(h_1 + h_2) * f](t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{2.8}$$

$$G(\omega) = \sqrt{2\pi} [H_1(\omega) + H_2(\omega)] F(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.9}$$

Quindi anche L è un filtro, con risposta impulsiva $h = h_1 + h_2$ in tempo e

$$h = h_1 + h_2 \quad \text{in tempo}, \qquad H = \sqrt{2\pi}(H_1 + H_2) \quad \text{in frequenza}.$$

Se L_1 e L_2 sono stabili allora lo stesso ovviamente vale per L.

(ii) Connessione in Cascata. Se L_1 ed L_2 sono connessi in cascata (o in serie), allora il sistema composto L è definito sullo stesso dominio Φ, e si ha

$$L : f \mapsto g = L_2(L_1(f)) \qquad \forall f \in \Phi.$$

In seguito al Corollario 1.4 L è allora caratterizzato dalle seguenti risposte: [17]

$$g(t) = [h_2 * h_1 * f](t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{2.10}$$

$$G(\omega) = 2\pi H_2(\omega) H_1(\omega) F(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.11}$$

[16] Più precisamente, qui F, G, H sono distribuzioni proprie: i rispettivi valori in $k \in \mathbf{Z}$ vanno moltiplicati ciascuno per δ_k.

[17] La scrittura $h_1 * h_2 * f$ non è ambigua poiché la convoluzione è associativa.

Pertanto pure L è un filtro, con risposta impulsiva

$$h = h_2 * \, h_1 \quad \text{ in tempo,} \qquad H = 2\pi H_2 H_1 \quad \text{ in frequenza.}$$

Anche in questo caso se L_1 e L_2 sono stabili allora lo stesso ovviamente vale per L.

(iii) Connessione in Retroazione. [18] I filtri L_1 ed L_2 possono anche essere connessi in forma *retroattiva* (o con *feedback).* Con questo si intende che l'uscita di L_1 entra in L_2, e la corrispondente uscita è sommata all'ingresso di L_1. [19] Questo corrisponde al sistema

$$g(t) = L_1(f + L_2(g))(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{2.12}$$

ovvero, in termini delle funzioni di trasferimento,

$$g(t) = [h_1 * (f + h_2 * g)](t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2.13}$$

Trasformando con Fourier si ottiene

$$G(\omega) = \sqrt{2\pi}[H_1(F + \sqrt{2\pi} H_2 G)](\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}, \tag{2.14}$$

ovvero, se il denominatore $1 - 2\pi H_1 H_2$ non si annulla,

$$G(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}\, H_1(\omega)}{1 - 2\pi H_1(\omega) H_2(\omega)} F(\omega) \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}. \tag{2.15}$$

Quindi pure L è un filtro, e la sua risposta impulsiva in frequenza è

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}\, H_1(\omega)}{1 - 2\pi H_1(\omega) H_2(\omega)} \qquad \forall \omega \in \mathbf{R}.$$

Antitrasformando ovviamente si ottiene la risposta impulsiva in tempo:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\pi}\, H_1(\omega)}{1 - 2\pi H_1(\omega) H_2(\omega)} \right)(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2.16}$$

In questo caso le condizioni che garantiscano la stabilità di L sono meno ovvie che nei casi precedenti. [20]

In alternativa al *feed-backward,* si può pensare al *feed-forward;* con questo si intende che l'ingresso di L_1 entra anche in L_2, e la corrispondente uscita è sommata a quella di L_1. Ma si verifica facilmente che questo altro non è che la connessione in parallelo di L_1 e L_2.

I precedenti tre arrangiamenti fondamentali possono essere combinati in modo da ottenere filtri più complessi, le cui funzioni di trasferimento possono essere formulate mediante le regole sopra esposte.

3 * Perché le Funzioni Esponenziali?

La funzione esponenziale è alla base delle trasformazioni di Fourier e di Laplace. Perché essa gioca un ruolo tanto importante? La risposta alla domanda posta sta essenzialmente nel fatto che l'esponenziale

[18] Queste connessioni sono alla base dei servo-meccanismi e di molti sistemi di controllo.
[19] Quindi si trascura il ritardo con cui l'uscita rientra come ingresso nei sistemi fisici.
[20] Si noti che $H_1 H_2 \equiv (2\pi)^{-1}$ se e solo se $h_1 * h_2 \equiv \delta$.

è un *carattere,* ovvero un isomorfismo tra il gruppo additivo di $\mathbf{C}$ (o di $\mathbf{R}$) e quello moltiplicativo di $\mathbf{C} \setminus \{0\}$: [21]

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad \forall a, b \in \mathbf{C}. \tag{3.1}$$

Questo ovviamente comporta che le funzioni esponenziali sono autofunzioni delle traslazioni; qui dimostriamo che questo implica che gli esponenziali sono autofunzioni dei filtri (i quali sono invarianti per traslazioni). Preliminarmente poniamo [22]

$$\varepsilon_\omega : \mathbf{R} \to \mathbf{C} : t \mapsto e^{\omega t} \qquad \forall \omega \in \mathbf{C}.$$

Teorema 3.1. *(delle autofunzioni – I) Se $L : \Phi \to \Phi$ è un sistema lineare e invariante nel tempo, allora*

$$\textit{posto} \quad k(\omega) := [L(\varepsilon_\omega)](0), \qquad L(\varepsilon_\omega) = k(\omega)\varepsilon_\omega \qquad \forall \omega \in \mathbf{C} \textit{ tale che } \varepsilon_\omega \in \Phi. \tag{3.2}$$

In altri termini la funzione $\varepsilon_\omega : t \mapsto e^{\omega t}$ è un'*autofunzione* dell'operatore L, e $[L(\varepsilon_\omega)](0)$ è l'*autovalore* associato. (Questo appunto in ipotesi alquanto generali.) Questo significa che il sistema trasforma il segnale esponenziale ε_ω in un segnale esponenziale con lo stessa frequenza ω. Più specificamente il sistema agisce su tale segnale conservandone la frequenza, modificando l'ampiezza di un fattore reale costante e/o traslandone la fase.

Dimostrazione. Posto $g_\omega := L(\varepsilon_\omega)$, abbiamo

$$\begin{aligned} g_\omega(t_0 + t) &= [L(\varepsilon_\omega)](t_0 + t) = [L(\varepsilon_\omega(t_0 + \cdot)](t) \\ &= [L(e^{\omega t_0}\varepsilon_\omega)](t) = e^{\omega t_0}[L(\varepsilon_\omega)](t) = e^{\omega t_0} g_\omega(t) \qquad \forall t, t_0 \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Abbiamo applicato la definizione di g_ω nella prima e nell'ultima uguaglianza, l'invarianza temporale di L nella seconda, la (3.1) (ovvero $\varepsilon_\omega(t_0 + t) = e^{\omega t_0}\varepsilon_\omega(t)$) nella terza, la linearità di L nella quarta.

Ponendo $t = 0$ nella (3.3) otteniamo quindi $g_\omega(t_0) = e^{\omega t_0} g_\omega(0)$ per ogni $t_0 \in \mathbf{R}$. Ponendo $k(\omega) := g_\omega(0) = [L(\varepsilon_\omega)](0)$, si perviene allora a $[L(\varepsilon_\omega)](t_0) = k(\omega)\varepsilon_\omega(t_0)$ per ogni $t_0 \in \mathbf{R}$, ovvero la (3.2). $\square$

Supponiamo ora che ogni input del sistema possa essere rappresentato come un integrale di funzioni esponenziali ε_ω; sappiamo che questo è il caso ad esempio se l'input può essere rappresentato mediante serie o integrale di Fourier o integrale di Laplace (ovvero, se è trasformabile e se vale la formula di trasformazione inversa). Per via del Teorema 3.1 il sistema agisce su ogni funzione ε_ω moltiplicandola per il suo autovalore $k(\omega) = [L(\varepsilon_\omega)](0)$; se il sistema è anche stabile, l'output allora coincide con l'integrale della funzione $\omega \mapsto k(\omega)\varepsilon_\omega$. [23] Per i sistemi definiti anche per funzioni impulsive ora mostriamo che l'autovalore $[L(\varepsilon_\omega)](0)$ è pari alla trasformata di Fourier della funzione di trasferimento del sistema; per sistemi causali la trasformata di Fourier può essere sostituita da quella di Laplace.

Sistemi definiti anche per funzioni impulsive. In seguito al Teorema 1.4, in questo caso il sistema (se stabile) è di convoluzione, ovvero $L(f) = L(\delta) * f$ per ogni $f \in \Phi$. La dimostrazione della (3.2) risulta allora ancora più diretta.

[21] Si può dimostrare che ogni carattere su $\mathbf{R}$ (o su $\mathbf{C}$) è necessariamente un esponenziale, ovvero è della forma $f(x) = e^{ax}$ per un opportuno $a \in \mathbf{C}$ (o $a \in \mathbf{C}$).

[22] Qui denomineremo ω la frequenza complessa, come abbiamo già fatto trattando la trasformazione di Laplace. A dire il vero, questa denominazione è appropriata solo per ω immaginario, e meglio sarebbe parlare di pulsazione o frequenza angolare.

[23] Qui stiamo pensando a input ed output di $\Phi \cap L^1$ (supposto non vuoto). Se invece essi sono elementi di $\Phi \cap L^2$ allora questi integrali convergono nel senso del valor proprio, come abbiamo visto studiando la trasformazione di Fourier in L^2.

Teorema 3.2. *(delle autofunzioni – II) Se $L : \Phi \to \Phi$ è un sistema lineare, stabile, invariante nel tempo e definito anche per funzioni impulsive, allora*

$$\text{posto} \quad k(\omega) := \int_{\mathbf{R}} [L(\delta)](\tau) e^{-\omega\tau}\, d\tau, \qquad L(\varepsilon_\omega) = k(\omega)\varepsilon_\omega \qquad \forall\omega \in \mathbf{C} \text{ tale che } \varepsilon_\omega \in \Phi. \tag{3.4}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} [L(\varepsilon_\omega)](t) &= [L(\delta * \varepsilon_\omega)](t) = [L(\delta) * \varepsilon_\omega](t) = \int_{\mathbf{R}} [L(\delta)](\tau) e^{\omega(t-\tau)}\, d\tau \\ &= \int_{\mathbf{R}} [L(\delta)](\tau) e^{-\omega\tau}\, d\tau\; e^{\omega t} =: k(\omega) e^{\omega t} \qquad q\forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Qui abbiamo applicato la linearità di L nella seconda uguaglianza. □

Sistemi causali e trasformazione di Laplace. Supponiamo ora che L sia anche causale, cosicché pure il segnale $L(\delta)$ è causale. La funzione k definita in (3.4) è quindi la trasformata di Laplace della risposta impulsiva in tempo, ovvero è la risposta impulsiva in frequenza:

$$k(\omega) := \int_{\mathbf{R}} [L(\delta)](\tau) e^{-\omega\tau}\, d\tau = [\mathcal{L}(L(\delta))](\omega) \qquad \forall\omega \in \mathbf{C} \text{ tale che } \mathrm{Re}(\omega) > \lambda(L(\delta)). \tag{3.6}$$

Resta così dimostrato il seguente risultato.

Teorema 3.3. *(delle autofunzioni – III) Sia $L : \Phi \to \Phi$ un sistema lineare, stabile, invariante nel tempo, causale e definito anche per funzioni impulsive. Se $L(\delta) \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$, allora per ogni ω nel semipiano di convergenza della funzione $L(\delta)$:*
(i) ε_ω è un'autofunzione di L;
(ii) $[\mathcal{L}(L(\delta))](\omega)$ è il corrispondente autovalore, ovvero: $L(\varepsilon_\omega) = [\mathcal{L}(L(\delta))](\omega)\, \varepsilon_\omega$.

Ad esempio, ogni operatore differenziale $L := \sum_{\ell=0}^n a_\ell D^\ell$ (con $a_0, ..., a_n \in \mathbf{C}$) è definito su C^∞, è lineare, stabile e invariante nel tempo. Poiché $L(\delta) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell D^\ell \delta \in \bar{D}_{\mathcal{L}}$, possiamo concludere che ε_ω è un'autofunzione di L associata all'autovalore

$$[\mathcal{L}(L(\delta))](\omega) = \big[\mathcal{L}\big(\textstyle\sum_{\ell=0}^n a_\ell D^\ell \delta\big)\big](\omega) = \textstyle\sum_{\ell=0}^n a_\ell \omega^\ell \in \mathbf{C} \qquad \forall\omega \in \mathbf{C} \text{ con } \mathrm{Re}(\omega) > 0. \tag{3.7}$$

Sistemi non causali e trasformazione di Fourier. Qui sopra compare la trasformata di Laplace poiché stiamo usando le funzioni esponenziali ε_ω con ω complesso. Se l'ascissa di convergenza della risposta in frequenza $\mathcal{L}(L(\delta))$ è strettamente negativa, allora per ω immaginario ritroviamo la trasformata di Fourier, e possiamo lasciar cadere l'ipotesi di causalità. Più precisamente, tenendo conto del legame tra le due trasformate,

$$L(\delta) \in L^1 \quad \Rightarrow \quad k(i\xi) = \sqrt{2\pi}[\mathcal{F}(L(\delta))](\xi) \qquad q\forall\xi \in \mathbf{R}. \tag{3.8}$$

Per i sistemi non causali possiamo quindi riformulare il precedente teorema come segue.

Teorema 3.4. *(delle autofunzioni – IV) Sia $L : \Phi \to \Phi$ un sistema lineare, stabile, invariante nel tempo e definito anche per funzioni impulsive. Se $L(\delta) \in L^1$, allora per ogni $\xi \in \mathbf{R}$ tale che $e_{i\xi} \in \Phi$:*
(i) $e_{i\xi}$ è un'autofunzione di L;
(ii) $\sqrt{2\pi}[\mathcal{F}(L(\delta))](\xi)$ è il corrispondente autovalore, ovvero:

$$L(e_{i\xi}) = \sqrt{2\pi}[\mathcal{F}(L(\delta))](\xi)\; e_{i\xi} \qquad q\forall\xi \in \mathbf{R}. \tag{3.9}$$

3.1 Esercizi.

1. Si calcoli la risposta al gradino unitario per un sistema in parallelo, per uno in serie, e per uno in feedback.

2. Si calcolino gli autovalori degli amplificatori.

3. Per ciascuna delle seguenti equazioni si stabilisca se il corrispondente sistema è causale, se è tempo-invariante, se è stabile. Se ne calcolino poi la funzione di trasferimento e la risposta al gradino unitario, sia in tempo che in frequenza:

   (i) $y''(t) + ay(t) = f$ ($a \in \mathbf{R}$),

   (ii) $y'(t) = f$ (il corrispondente sistema è detto un *integratore),*

   (iii) $y'(t) = f$ (il corrispondente sistema è detto un *differenziatore),*

4. Gli autovalori del sistema lineare associato all'operatore differenziale $aD^2 + bI$ (con $a, b \in \mathbf{C}$) possono essere espressi in termini di entrambe le trasformazioni di Laplace e di Fourier?

5. Si assuma di conoscere la funzione di trasferimento in tempo h di un sistema lineare. Supposto che $f(x) = e^{-x^2}$ sia un input ammissibile, si esprima l'output corrispondente in termini di h, f.