Serie di Fourier

A. Visintin – Fourier Analysis, a.a. 2019-20

In questo capitolo introduciamo le funzioni periodiche, gli sviluppi in serie di Fourier [1] in forma di seni e coseni per le funzioni di periodo 2π, e ne identifichiamo i coefficienti. Affrontiamo quindi la relazione tra la funzione e la sua serie di Fourier, e formuliamo un teorema di convergenza. Esaminiamo anche come alcune proprietà della funzione (parità, realtà, ecc.) si traducono in termini dei suoi coefficienti di Fourier. Introduciamo poi la rappresentazione esponenziale delle serie di Fourier, ed estendiamo la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi. Successivamente assumiamo il punto di vista dell'Analisi Funzionale, e trattiamo la convergenza delle serie trigonometriche nello spazio di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$. Mostriamo poi l'uso delle serie di Fourier per la risoluzione di certi problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali, mediante il metodo di separazione delle variabili. Infine illustriamo alcuni classici aspetti analitici di questa teoria.

Nota. Il simbolo [Ex] indica che la giustificazione non è difficile, ed è lasciata come esercizio. Il simbolo [] invece indica che la giustificazione non è facile ed è omessa. Il simbolo ***** è usato per indicare punti che possono essere omessi (oltre che per il coniugio...).

1 Funzioni Periodiche

Fissata una costante $T > 0$, si dice che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è *periodica di periodo* T (o più brevemente T*-periodica)* [2] se

$$f(t+T) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Ovviamente, una funzione periodica di periodo T è pure periodica di periodo kT per ogni intero $k > 1$. Ogni funzione periodica continua non costante ha un periodo minimo, detto *periodo fondamentale;* ogni altro periodo è multiplo intero di quello fondamentale. Ad esempio le funzioni seno, coseno, esponenziale immaginario (ovvero $t \mapsto e^{it}$) sono periodiche di periodo $2k\pi$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, e di periodo fondamentale 2π; la funzione tangente è pure periodica di periodo $2k\pi$, ma ha periodo fondamentale π.

È naturale interpretare la *variabile indipendente* t come tempo, e questo è necessariamente reale. Lo stato $f(t)$ (ovvero la *variabile dipendente)* sarà invece supposto un valore complesso. Comunque si può anche interpretare t come una variabile spaziale (pure necessariamente reale), ed allora avrà senso estendere i risultati di questa sezione al caso in cui t è un vettore di $\mathbf{R}^N$. Gran parte dei risultati di questo capitolo possono essere facilmente estesi al caso di $t \in \mathbf{R}^N$, con f periodica *multiperiodica,* ovvero periodica rispetto ad ogni componente di t.

Siano $a \in \mathbf{R}$ e $T > 0$; una qualsiasi funzione $f : [a, a+T[\to \mathbf{C}$ può essere estesa in uno ed un solo modo ad una funzione T-periodica $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, detta appunto *estensione* T*-periodica* di f. Poiché ogni numero reale può essere rappresentato nella forma $t + nT$ per $t \in [a, a+T[$ e $n \in \mathbf{Z}$ opportuni, basta porre $\widetilde{f}(t+nT) := f(t)$ per ogni t ed n. È quindi equivalente studiare una funzione T-periodica f su tutto $\mathbf{R}$ o su un qualsiasi intervallo di lunghezza T; inoltre l'integrale $\int_a^{a+T} f(t)\, dt$ è indipendente da $a \in \mathbf{R}$, se tale integrale esiste per almeno un valore di a. [Es]

[1] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

[2] Si definiscono anche la *frequenza* $\nu := 1/T$, e la *pulsazione* (o velocita' angolare) $\omega := 2\pi\nu$. La frequenza è misurata in cicli nell'unita' di tempo, la pulsazione in radianti nell'unita' di tempo.

Spesso si identifica una funzione periodica con la sua restrizione ad un intervallo di lunghezza pari al suo periodo. Questa rappresentazione presenta alcuni vantaggi; ad esempio, la funzione nulla è l'unica funzione periodica di $L^2(\mathbf{R})$, mentre $L^2(a, a+T)$ comprende una gran quantità di funzioni. Si noti comunque che per ogni funzione T-periodica f

$$\widetilde{f} \in C^0(\mathbf{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad f \in C^0([a, a+T[) \quad \text{e} \lim_{t \to (a+T)^-} f(t) = f(a). \tag{1.1}$$

Si dice che una funzione $f :]a, b[\to \mathbf{C}$ è *continua a tratti* se è continua in tutti i punti salvo al più in un numero finito, nei quali comunque esistono finiti sia il limite sinistro che quello destro; si chiede anche che esistano finiti il limite destro in a e quello sinistro in b. Si dice che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è continua a tratti se lo è in ogni intervallo. Si noti che una funzione continua a tratti è limitata, quindi integrabile, in ogni intervallo.

Ad esempio, la funzione $f : [0, 1[\to \mathbf{R} : t \mapsto \operatorname{sign}(\sin(1/t))$ non è continua a tratti. [3] L'estensione π-periodica della funzione $f : [0, 1[\to \mathbf{R} : t \mapsto t$ è continua a tratti, mentre quella della funzione tangente non lo è.

Analogamente si dice che una funzione $f :]a, b[\to \mathbf{C}$ è *monotòna a tratti* se esiste un insieme finito di punti $t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$ tali che f è o non crescente o non decrescente in ogni intervallo $]t_n, t_{n+1}[$ $(n = 0, ..., N-1)$ (questo comportamento può variare da intervallo a intervallo). Si dice anche che una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è monotona a tratti se lo è in ogni intervallo.

Ad esempio, le funzioni seno e coseno sono monotone a tratti su $]-\pi, \pi[$ ed anche su tutto $\mathbf{R}$; la funzione $f : t \mapsto t \sin(1/t)$ (con $f(0) = 0$) è monotona a tratti su ogni intervallo $[a, 2\pi[$ con $0 < a < 2\pi$, ma non su tutto $]0, 2\pi[$ (e tanto meno su tutto $\mathbf{R}$).

Si noti che le funzioni periodiche di un certo periodo costituiscono uno spazio lineare, e che lo stesso vale sia per le funzioni continue a tratti che per quelle monotone a tratti.

2 Rappresentazione Trigonometrica delle Serie di Fourier ed Identificazione dei Coefficienti

In questo paragrafo assumiamo che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sia una funzione 2π-periodica, e la identifichiamo con la sua restrizione ad un qualsiasi intervallo di lunghezza 2π, ad esempio all'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Lo sviluppo in serie di Fourier si applica a funzioni periodiche. Qui assumiamo che il periodo sia uguale a 2π per semplificare certi conti; poi estenderemo facilmente la trattazione a funzioni di periodo qualsiasi.

Studieremo la possibilità di approssimare f mediante una successione di funzioni della forma

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},$$

dette *polinomi trigonometrici* (di ordine n) per motivi che saranno chiariti più avanti. Poniamo poi

$$S(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

detta *serie trigonometrica* o *serie di Fourier formale.* Parleremo poi di serie di Fourier vera e propria (non formale) se questa serie converge, in un senso da specificare volta per volta: o dappertutto,

[3] La funzione segno è così definita: $\operatorname{sign}(x) = -1$ se $x < 0$, $\operatorname{sign}(x) = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sign}(0) = 0$.

o quasi dappertutto, o nello spazio di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$, ecc.. [4] Pertanto per serie di Fourier si intende lo sviluppo *in seni e coseni* di una funzione data.

Con terminologia tratta dall'acustica, il termine $a_0/2$ è detto *componente continua* del segnale; [5] la funzione $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ è detta *armonica fondamentale;* gli addendi corrispondenti agli altri k sono detti *armoniche superiori.*

Data una funzione f, ci chiediamo se $S = f$ in $\mathbf{R}$ per un'opportuna scelta dei coefficienti $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ e $\{b_1, b_2, ...\}$. [6]

Lemma 2.1. *(di Ortogonalità)*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, \cos \ell t \, dt = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \neq \ell \\ \pi & \textit{se } k = \ell \neq 0 \\ 2\pi & \textit{se } k = \ell = 0 \end{cases} \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N}, \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \, \sin \ell t \, dt = \begin{cases} 0 & \textit{se } k \neq \ell \\ \pi & \textit{se } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \textit{se } k = \ell = 0 \end{cases} \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N}, \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, \sin \ell t \, dt = 0 \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N}. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Grazie alla formula di Eulero,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \, \cos \ell t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \, \frac{e^{i\ell t} + e^{-i\ell t}}{2} \, dt$$
$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(k+\ell)t} + e^{i(k-\ell)t} + e^{i(\ell-k)t} + e^{-i(k+\ell)t} \right) dt \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{N};$$

dall'identità fondamentale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \qquad \forall m \in \mathbf{N}, \tag{2.5}$$

consegue allora la (2.2). La dimostrazione delle (2.3) e (2.4) è analoga. □

Secondo l'impostazione dell'analisi funzionale, le (2.2)—(2.4) esprimono l'ortogonalità nel senso del prodotto scalare di $L^2(-\pi,\pi)$ di ogni coppia di funzioni dell'insieme

$$\{\sin kt, \cos kt : k \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, \sin t, \cos t, ..., \sin kt, \cos kt, ...\}.$$

(Torneremo su questo aspetto più avanti.) Queste funzioni sono continue, ed appartengono a $L^p(-\pi,\pi)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Siamo ora in grado di mostrare che i coefficienti di Fourier di una funzione f sono determinati univocamente da f, e possiamo esprimere i coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ in termini di f. [7]

---

[4] Una certa ambiguità è insita nel termine *serie.* Questo indica sia la successione delle somme parziali che il loro eventuale limite. Qui ci riferiamo alla successione delle somme parziali, dal momento che il limite può anche non esistere. (In ogni caso, trattandosi di funzioni, occorrerebbe specificare il senso del limite, ovvero il tipo di convergenza a cui si fa riferimento.)

[5] Questa denominazione non è delle più felici, poiché anche gli altri addendi sono continui.

[6] La scrittura $S = f$ presuppone la convergenza della serie stessa, in un senso ancora da specificare.

[7] In *Teoria dei Segnali,* le successioni dei coefficienti di Fourier $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono dette lo *spettro* del segnale f.

Si noti la diversa terminologia: in Analisi lo spettro di un operatore lineare e' costituito dalle autofunzioni (nelle situazioni piu' semplici); in Teoria dei Segnali lo spettro di un segnale e' l'insieme delle componenti rispetto alle autofunzioni.

Teorema 2.2. *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ una funzione 2π-periodica continua. Se la serie (2.1) converge uniformemente a $S = f$, allora*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \ (=: a_k(f)) \qquad \textit{per } k = 0, 1, 2, ... \tag{2.6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \ (=: b_k(f)) \qquad \textit{per } k = 1, 2, ... \tag{2.7}$$

Dimostrazione. In seguito all'ipotesi di convergenza uniforme, possiamo scambiare le operazioni di serie e di integrazione. Grazie al lemma di ortogonalità abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos \ell t\,dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell t\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\right)\cos \ell t\,dt \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\cos \ell t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\cos \ell t\,dt \\
&= a_\ell\pi \qquad \text{per } \ell = 0, 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(Si noti che questa formula vale anche per $\ell = 0$: è proprio per ottenere questo che abbiamo scritto il termine costante della serie nella forma $a_0/2$.)

Analogamente si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin \ell t\,dt = b_\ell\pi \qquad \text{per } \ell = 1, 2, ... \ \square$$

In quest'ultimo teorema abbiamo richiesto che la funzione f fosse continua, poiché la dimostrazione si basa sulla convergenza uniforme; tuttavia le formule (2.6) e (2.7) hanno senso anche per $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Questo lascia sperare di poter rappresentare in serie di Fourier anche funzioni meno regolari, ad esempio continue a tratti, o soltanto L^p per un $p \in [1, +\infty]$.

Inoltre la trasformazione $\Phi : f \mapsto (\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\})$ opera (ad esempio) da $L^1(-\pi, \pi)$ a $(\ell^\infty)^2$ (lo spazio di Banach delle successioni limitate $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, dotato della norma del sup). Si verifica facilmente che Φ è lineare e continua. [Ex] In particolare

$$\Phi(if) = i\Phi(f) \qquad \forall f \in L^1(-\pi, \pi). \tag{2.9}$$

Se f è a valori reali (immaginari, risp.), allora i suoi coefficienti di Fourier $\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\}$ sono reali (immaginari, risp.).

Se $\{a_k(f)\}, \{b_k(f)\} \in \ell^1$ allora la serie di Fourier converge in $C^0([-\pi, \pi])$.

Per una generica funzione $f \in L^1(-\pi, \pi)$, denoteremo con S_f la serie trigonometrica corrispondente ai coefficienti di Fourier $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$ definiti in (2.6) e (2.7),

$$S_f(t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt], \tag{2.10}$$

e con $S_{f,n}$ il corrispondente polinomio trigonometrico di ordine n:

$$S_{f,n}(t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt]. \tag{2.11}$$

Ovviamente la somma finita $S_{f,n}$ non presenta alcun problema di convergenza. Per contro, la serie di Fourier formale S_f di f può convergere puntualmente o meno.

In un serto senso $S : f \mapsto S_f$ è la trasformazione inversa della Φ.

Osservazione. La serie di (2.1) non è l'unica rappresentazione delle serie di Fourier. Nel prossimo paragrafo vedremo alcune rappresentazioni alternative della funzione originaria (quella che ha generato la famiglia dei coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$).

Nell'ultimo mezzo secolo sono state poi studiate altre rappresentazioni alternative, che non usano i coefficienti di Fourier e si discostano alquanto dalla teoria qui sviluppata. In particolare le celebri *wavelets* sono particolarmente utili ad esempio nella compressione dei segnali; ne accenneremo parlando di *time-frequency analysis.*

Altre rappresentazioni dello spettro. Sia ora $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-periodica e continua, si definiscano gli a_k e i b_k come in (2.6) e (2.7). Per ogni $k \in \mathbf{N}$ siano $\rho_k \geq 0$ e $\theta_k \in [0, 2\pi[$ tali che

$$\begin{cases} \rho_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{ e, se } \rho_k > 0, \\ \cos\theta_k = \dfrac{a_k}{\rho_k}, \quad \sin\theta_k = -\dfrac{b_k}{\rho_k} \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}; \tag{2.12}$$

per $k = 0$ si pone $\rho_0 = a_0/2$. I θ_k sono univocamente determinati se $\rho_k > 0$; ae invece $\rho_k = 0$ si prende un qualsiasi valore per θ_k.

Si può allora riscrivere la serie (2.1) nella forma equivalente

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cos(kt + \theta_k) \qquad \forall t \in \mathbf{R}; \tag{2.13}$$

In teoria dei segnali i numeri ρ_k e θ_k sono rispettivamente detti *ampiezza* e *fase* della frequenza k-esima del segnale f; le corrispondenti successioni $\{\rho_k\}$ e $\{\theta_k\}$ sono rispettivamente dette *spettro di ampiezza* e *spettro di fase.* Poiché $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, ponendo $\widetilde{\theta}_k := \theta_k + \pi/2$ la (2.13) è anche equivalente a

$$S_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \sin(kt + \widetilde{\theta}_k) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2.14}$$

3 Convergenza delle Serie di Fourier

In questo paragrafo forniamo delle condizioni sufficienti (sebbene non necessarie) per la convergenza della serie trigonometrica (2.1), e discutiamo l'uguaglianza $S_f = f$.

Teorema 3.1. *(di Convergenza di Dirichlet) [] Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ una funzione 2π-periodica, continua a tratti, e si supponga che f' esista e sia continua a tratti, oppure che f sia monotona a tratti. Si ponga* [8]

$$\widetilde{f}(t) := \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Allora la serie di Fourier formale di f converge puntualmente alla funzione $\widetilde{f}$; ovvero, definendo $a_k = a_k(f)$ e $b_k = b_k(f)$ per ogni k come in (2.6) *e* (2.7)*,*

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \; (=: S_f(t)) \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

[8] Con notazione standard, $f(t \pm 0) := \lim_{y \to t^\pm} f(y)$.

Se f è anche continua in un intervallo $[a,b] \subset \mathbf{R}$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente a $\widetilde{f} = f$ in $[a,b]$.

Essendo $\widetilde{f} = f$ in ogni punto in cui f è continua, la (3.2) implica $S_f = f$ in ogni punto in cui f è continua, quindi quasi ovunque in $]-\pi,\pi[$ per ogni funzione continua a tratti.

Osservazioni. (i) Mediante la serie di Fourier formale si può approssimare qualsiasi funzione periodica ad esempio di classe C^1 (quindi soddisfacente le ipotesi del Teorema 3.1) con una serie di funzioni di classe C^∞. Questo può apparire sorprendente, poiché per ogni k una somma finita di funzioni di classe C^k è essa pure di classe C^k, per ogni $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Tuttavia quest'ultima affermazione in generale non vale per le serie di funzioni, ovvero per le somme infinite; infatti la derivata di una serie di funzioni è uguale alla serie delle derivate solo sotto opportune ipotesi. Ad esempio se f è di classe C^1, allora in seguito al Teorema 3.1 la sua serie di Fourier converge uniformemente a f, ma non è detto che la serie di Fourier formale di f' (che a priori è solo di classe C^0) converga a f'.

(ii) Per le (2.6) e (2.7), ciascun coefficiente di Fourier dipende da f attraverso un'integrazione, e quindi non risente del comportamento di f in specifici punti; pertanto, se si modifica f solo in un punto $\bar{t}$ (o più in generale in un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ di misura nulla), $S_f(\bar{t})$ non può cambiare.

Il Teorema di convergenza 3.1 ci dice che $f = S_f$ nei punti in cui f è continua. I motivi per cui questo avvenga non sono ovvi: per rendersene conto occorrerebbe esaminare la dimostrazione. Tuttavia è chiaro che per quei punti non si può ripetere il ragionamento appena esposto, perchè modificando la f in un punto ivi verrebbe meno la continuità.

(iii) Ciascun coefficiente di Fourier dipende dal comportamento globale di f, per via delle (2.6) e (2.7). Tuttavia, a differenza di quanto ci si potrebbe aspettare a priori, per ogni $t \in]-\pi,\pi[$ il valore della somma $S_f(t)$ dipende solo dal comportamento di f in prossimità di t. Più precisamente si ha il seguente risultato.

Corollario 3.2. *(Principio di localizzazione di Riemann) Se $f_1, f_2 :]-\pi,\pi[\to \mathbf{C}$ sono due funzioni continue tali che $f_1 = f_2$ in un intervallo $]a,b[\subset]-\pi,\pi[$, allora*

$$S_{f_1,n}(t) - S_{f_2,n}(t) \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty, \forall t \in]a,b[.$$

Si noti che qui si richiede solo la continuità; quindi le due serie formali potrebbero non convergere.

In altri termini, se due funzioni hanno coefficienti di Fourier (e la continuità lo garantisce), allora le loro serie di Fourier formali hanno lo stesso comportamento in quell'aperto. Questo può apparire un po' sorprendente, poiché i coefficienti di Fourier dipendono dal comportamento globale della funzione, ma è una diretta conseguenza del teorema di convergenza applicato alla funzione $f_1 - f_2$.

(iv) Nei pressi dei punti di discontinuità di f, per ogni intero $n \geq 1$ la somma parziale $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ presenta delle oscillazioni attorno al valore limite. Per $n \to \infty$ queste oscillazioni diventano sempre più piccole, in modo da consentire la convergenza uniforme della serie di Fourier in ogni intervallo in cui f è continua, coerentemente col Teorema 3.1. In prossimità dei punti di discontinuità di f le oscillazioni comunque non si smorzano.

Si consideri ad esempio la funzione segno nell'intervallo $]-\pi,\pi[$:

$$f(t) := -1 \quad \text{se } -\pi < t < 0, \quad f(0) := 0, \quad f(t) := 1 \quad \text{se } 0 < t < \pi.$$

allora $S_{f,n} \to f$ puntualmente in $]-\pi,\pi[$, e la convergenza è uniforme in ogni sotto-intervallo chiuso che non contiene lo 0. Tuttavia si può dimostrare che per ogni n

$$\begin{aligned} &\exists t_n \in]0,\pi[: \qquad S_{f,n}(t_n) - 1 \simeq 0.18 \quad \text{per } n \text{ grande},\\ &\exists t'_n \in]-\pi,0[: \quad S_{f,n}(t'_n) + 1 \simeq -0.18 \quad \text{per } n \text{ grande}; \end{aligned} \tag{3.3}$$

per quanto osservato, sia t_n che t'_n convergono a 0 per $n \to \infty$. [] Questo è noto come il *fenomeno di Gibbs,* e si presenta nei pressi di ogni punto di discontinuità.

* (v) La continuità di f non basta ad assicurare la convergenza della serie trigonometrica S_f: occorrono delle ipotesi aggiuntive su f, ad esempio quelle del Teorema 3.1 o altre condizioni più o meno elaborate. Elenchiamo schematicamente alcuni dei risultati più significativi:

— 1873: Du Bois Reymond costruisce una $f \in C^0([-\pi,\pi])$ tale che S_f non converge per $t = 0$.

— 1926: Kolmogorov costruisce una $f \in L^1(-\pi,\pi)$ tale che S_f non converge in alcun punto.

— 1966: Kahane and Katznelson dimostrano che per qualsiasi insieme di misura nulla $A \subset [-\pi,\pi]$ esiste $f \in C^0([-\pi,\pi])$ tale che S_f non converge in alcun punto di A. (Questo ovviamente generalizza il risultato di Du Bois Reymond.)

— 1966: Carleson dimostra che per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$ (in particolare quindi per ogni $f \in C^0([-\pi,\pi])$) S_f converge ad f in quasi tutti i punti. [9]

— 1967: Hunt estende il teorema di Carleson alle $f \in L^p(-\pi,\pi)$, per ogni $p > 1$. ($p = 1$ resta escluso grazie al risultato di Kolmogorov.)

Esempi.
Esempio 1. Si consideri la funzione $[-\pi,\pi[\to \mathbf{R} : t \mapsto t$, e sia f la sua estensione 2π-periodica a tutto $\mathbf{R}$. La funzione f è dispari, quindi può essere rappresentata formalmente come serie di soli seni. Essendo

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \sin kt \, dt = -\frac{2}{k}\cos k\pi = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \qquad \text{per } k = 1,2,...,$$

per la serie di Fourier formale si ottiene

$$S_f(t) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kt = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t + ... \qquad \forall t \in]-\pi,\pi[.$$

Per applicare il Teorema **??** di convergenza occorre ora valutare la regolarità della funzione: si verifica facilmente che sia f che f' sono continue a tratti, ed f ha dei salti solo in $k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Quindi

$$f(t) = S_f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}, \qquad f(t) = 0 \qquad \forall t \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

La funzione f è continua in ogni intervallo $[a,b] \subset]-\pi,\pi[$, ma non in tutto $[-\pi,\pi]$; pertanto la serie di Fourier S_f converge uniformemente a f in ogni intervallo $[a,b] \subset]-\pi,\pi[$, ma non in tutto $[-\pi,\pi]$.

Si noti che la convergenza puntuale di questa serie non era ovvia, dal momento che essa è a segni alterni, ma non e' ovvio che il termine generale sia infinitesimo. Ed infatti per $x = k\pi$ with $k \in \mathbf{Z}$ il comportamento della serie degenera.

[9] Questo risultato è basato su una dimostrazione particolarmente complessa, ed è valso a Carleson il prestigioso premio Abel nel 2006.

Esempio 2. Sia g l'estensione 2π-periodica della funzione $[-\pi,\pi[\to \mathbf{R} : t \mapsto |t|$. Questa funzione è pari, quindi può essere rappresentata formalmente come serie di soli coseni: essendo

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos kt\,dt = ... = \begin{cases} \pi & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } \neq 0 \\ -4/(\pi k^2) & \text{per } k = \text{dispari}, \end{cases} \tag{3.4}$$

si perviene a

$$\begin{aligned} S_g(t) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)t \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos t - \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + ...\Big) \qquad \forall t \in\,]-\pi,\pi[. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si verifica facilmente che f è continua su tutto $\mathbf{R}$ e f' è continua a tratti. Per il Teorema **??** quindi $f(t) = S_f(t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, e S_f converge uniformemente in tutto $\mathbf{R}$.

Tra l'altro per $t = \pi$ si ottiene una rappresentazione di π^2:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

Esempio 3. Sia $h(t) := \tan t$ per ogni $t \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Questa funzione non è continua a tratti, quindi possiamo applicare il Teorema **??** solo al di fuori di un intorno di $\mathbf{Z}$.

4 Rappresentazione Esponenziale delle Serie di Fourier

Abbiamo esaminato le serie di Fourier formali per funzioni a valori reali; nulla impedisce di estendere quegli sviluppi a funzioni a valori complessi, dal momento che grazie alla linearità la trasformazione $f \mapsto (\{a_k(f)\},\{b_k(f)\})$ può essere applicata sia alla parte reale che a quella immaginaria. In tal modo si ottiene una rappresentazione della forma (2.1), ma con spettro complesso, esso pure dato dalle formule (2.6) e (2.7). In questo paragrafo studieremo una diversa rappresentazione che si applica alle funzioni a valori complessi periodiche (anche qui assumendo che il periodo sia 2π per comodità).

Una serie trigonometrica

$$S(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k \sin kt) \qquad \forall t \in \mathbf{R} \tag{4.1}$$

può essere espressa equivalentemente mediante esponenziali complessi. Grazie alla formula di Eulero di rappresentazione dell'esponenziale di un numero complesso, abbiamo

$$e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{4.2}$$

ovvero

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \qquad \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.3}$$

Ponendo $c_k := \frac{1}{2}[a_{|k|} - i\,\mathrm{sign(k)} b_{|k|}]$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$, [10] ovvero

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \qquad c_k := \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad c_{-k} := \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \tag{4.4}$$

la (4.1) fornisce

$$S(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.5}$$

Quest'ultima è detta *serie trigonometrica in forma esponenziale.*

Al pari delle due successioni dei coefficienti $\{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}, \{b_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, pure la successione bilatera $\{c_k\}_{k \in \zeta}$ è denominata spettro del segnale f. [11]

In questo caso le relazioni di ortogonalità (2.2), (2.3) e (2.4) assumono una forma particolarmente semplice:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq \ell \\ 2\pi & \text{se } k = \ell \end{cases} \qquad \forall k, \ell \in \mathbf{Z}; \tag{4.6}$$

grazie a queste relazioni, il procedimento di calcolo utilizzato per ricavare le (2.6) e (2.7) fornisce

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \qquad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{4.7}$$

Le formule (4.4) e le loro inverse

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} & \text{per } k = 0, 1, 2, ..., \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) & \text{per } k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{4.8}$$

permettono di passare agevolmente dalla rappresentazione delle serie trigonometriche in termini di seni e coseni a quella esponenziale e viceversa.

Valore Principale. Resta da definire la somma della serie bilatera $\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \left(= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\right)$. Occorre scegliere tra due alternative:

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-ikt} \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \tag{4.9}$$

oppure

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4.10}$$

In questo caso quest'ultima è la definizione corretta: è detta somma della serie bilatera nel senso del *valore principale,* ed è anche indicata con V.P. $\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$.

Si noti che la convergenza di due serie numeriche $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}$ implica quella della corrispondente serie bilatera nel senso del valore principale (V.P.):

$$\text{V.P.} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k} \ ,$$

[10] sign è la funzione segno: $\mathrm{sign(x)} = -1$ per $x < 0$, $\mathrm{sign(x)} = 1$ per $x > 0$, $\mathrm{sign(0)} = 0$.

[11] A volte si dice che le successioni $\{a_k\}, \{b_k\}$ costituiscono lo *spettro reale,* mentre la $\{c_k\}$ è lo *spettro complesso,* poiché se f è reale allora $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$ sono reali, mentre $\{c_k(f)\}$ possono essere complessi. Comunque questa terminologia è un po' fuorviante, poiché nulla vieta di usare la rappresentazione in termini di seni e coseni anche per funzioni a valori complessi, ottenendo quindi coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ complessi.

ma non sempre vale il viceversa. Un semplice controesempio è ottenuto ponendo $\alpha_k := k$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$; infatti

$$\text{V.P.} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k = 0, \qquad \text{mentre} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}(-k) = -\infty;$$

in questo caso l'espressione $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{-k}$ non ha senso, poiché corrisponde alla forma indeterminata $(+\infty) + (-\infty)$. [12]

Nel seguito intenderemo sempre la somma delle serie doppie nel senso del valore principale, ed ometteremo di scrivere "V.P.". [13]

Mediante le formula di trasformazione (4.7) e (4.8), è facile verificare che intendere la serie trigonometrica $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$ nel senso del valore principale equivale a scrivere la corrispondente serie in forma di seni e coseni come

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad \text{piuttosto che} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

(Ovviamente la convergenza di entrambe queste due ultime serie e' piú restrittiva della convergenza della loro somma.)

Polinomi algebrici e polinomi trigonometrici. (i) Grazie alla (4.3) abbiamo

$$\cos kt \pm i \sin kt = e^{\pm ikt} = (e^{\pm it})^k = (\cos t \pm i \sin t)^k \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{4.11}$$

Sviluppando la potenza otteniamo un polinomio a coefficienti complessi nelle variabili $\cos t$ e $\sin t$: e.g.,

$$\cos kt + i \sin kt = \sum_{\ell=0}^{k} d_\ell x^\ell y^{k-\ell}. \tag{4.12}$$

Passando alle parti reale ed immaginaria, possiamo quindi rappresentare $\cos kt$ e $\sin kt$ come funzioni polinomiali reali di $\cos t$ e $\sin t$. Lo stesso quindi vale per ogni funzione polinomiale di $\cos kt$ e $\sin kt$, ovvero per le somme parziali della serie di Fourier (2.1).

Sia ora data una successione dei coefficienti complessi $\{c_k \in \mathbf{C}\}_{k\in\mathbf{Z}}$, e si ponga

$$P_n(x, y) := \sum_{k=0}^{n}[c_k(x + iy)^k + c_{-k}(x - iy)^k] \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

---

[12] Per le serie a termini positivi le due nozioni di convergenza sono equivalenti. (Non lo dimostriamo, però è chiaro che in tal caso sono escluse *compensazioni* come nel controesempio). Lo stesso vale per le serie assolutamente convergenti.

[13] Una definizione analoga può essere introdotta a proposito degli integrali di funzioni limitate su insiemi illimitati o di funzioni illimitate su insiemi limitati. Ad esempio gli integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ e $\int_{-1}^{+1} 1/t\,dt$ non esistono, né come integrali di Riemann generalizzati né come integrali di Lebesgue. Tuttavia si possono definire gli *integrali nel senso del valor principale:*

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt := \lim_{m\to+\infty} \int_{-m}^{m} t\,dt \;(= 0),$$

$$V.P. \int_{-1}^{+1} \frac{1}{t}\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{t}\,dt \right) (= 0).$$

Si noti la stretta analogia tra integrali impropri e serie.

Questo è un polinomio algebrico di grado n, ovvero è della forma

$$P_n(x,y) := \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} d_{k,\ell} x^\ell y^{k-\ell} \qquad \forall x,y \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},$$

per opportuni coefficienti complessi $d_{k,\ell}$. Grazie alla (4.11),

$$S_n(t) := \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikt} = P_n(\cos t, \sin t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} d_{k,\ell} (\cos t)^\ell (\sin t)^{k-\ell} \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}. \tag{4.13}$$

Questo giustifica la denominazione di *polinomio trigonometrico* per S_n, sia per la rappresentazione in termini delle funzioni trigonometriche $\cos kt$ e $\sin kt$, che per quella equivalente in termini degli esponenziali complessi e^{ikt}. Si noti che P_n è a valori reali sse i coefficienti $d_{k,\ell}$ sono reali. [14]

Analisi e Sintesi. Le formule (4.4) e (4.5) esprimono rispettivamente l'analisi e la sintesi di Fourier. Eliminando i coefficienti c_k si ottiene

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} \, d\tau \right) e^{ikt}, \tag{4.14}$$

ovvero la seguente fondamentale formula di inversione:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{ik(t-\tau)} \, d\tau. \tag{4.15}$$

5 Pari e Dispari ed altre Amenità

Funzioni Pari e Dispari. Denotando con c la funzione $\mathbf{Z} \to \mathbf{C} : k \mapsto c_k$ e con $i\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri immaginari, si verifica facilmente che

$$\begin{array}{lcll} f \text{ pari} & \Leftrightarrow & c_{-k} = c_k & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f \text{ dispari} & \Leftrightarrow & c_{-k} = -c_k & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f(t) \in \mathbf{R} \;\; \forall t & \Leftrightarrow & c_{-k} = c_k^* & \forall k \in \mathbf{Z}, \\ f(t) \in i\mathbf{R} \;\; \forall t & \Leftrightarrow & c_{-k} = -c_k^* & \forall k \in \mathbf{Z}. \end{array} \tag{5.1}$$

(La verifica di questa e di analoghe proprietà elementari è lasciata come esercizio.) Quest'ultima equivalenza discende dalla precedente, osservando che, denotando con $\widetilde{c}_k$ i ceofficienti di Fourier di $\widetilde{f}$,

$$\widetilde{f} = if \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{c}_k = ic_k \qquad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{5.2}$$

Denotando con c la successione bilatera $\mathbf{Z} \to \mathbf{C} : k \mapsto c_k$, la (5.1) può essere letta come segue:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ pari} & \Leftrightarrow & c \text{ è pari}, \\ f \text{ dispari} & \Leftrightarrow & c \text{ è dispari}, \\ f(t) \in \mathbf{R} \;\; \forall t & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}(c) \text{ è pari, } \mathrm{Im}(c) \text{ è dispari}, \\ f(t) \in i\mathbf{R} \;\; \forall t & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}(c) \text{ è dispari, } \mathrm{Im}(c) \text{ è pari}. \end{array} \tag{5.3}$$

[14] sse = se e solo se (= iff in English).

Incidentalmente si noti anche che, se f è sviluppabile in serie di Fourier formale, allora

$$f(t) \in \mathbf{R} \ \ \forall t \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \mathrm{Re}(c_k e^{ikt}) \ \ \forall t. \tag{5.4}$$

Il passaggio dalla funzione f alle successioni dei coefficienti di Fourier $\{(a_k, b_k)\}$ o $\{c_k\}$ è interpretato come un processo di *analisi;* l'operazione inversa che porta dai coefficienti di Fourier alla funzione f è interpretato come *sintesi.*

Rappresentazione Esponenziale Alternativa. In analogia con la (2.13), si noti che per ogni $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k = r_k e^{i\varphi_k} \qquad \text{per } r_k \geq 0 \text{ e } \varphi_k \in \mathbf{R} \text{ opportuni;}$$

i numeri r_k e $e^{i\varphi_k}$ sono rispettivamente detti *ampiezza* e *fasore.* Pertanto

$$S_f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} r_k e^{i(kt+\varphi_k)} \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{5.5}$$

Osservazione. Disponiamo quindi di quattro rappresentazioni per lo sviluppo in serie di Fourier formale di una funzione 2π-periodica:

(i) due rappresentazioni in termini di seni e coseni per $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$S_f^{(1)}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (a_k, b_k \in \mathbf{R}), \tag{5.6}$$

$$S_f^{(2)}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cos(kt + \theta_k) \qquad (\rho_k, \theta_k \in \mathbf{R}); \tag{5.7}$$

(ii) due rappresentazioni in forma esponenziale per $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$:

$$S_f^{(3)}(t) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad (c_k \in \mathbf{C}), \tag{5.8}$$

$$S_f^{(4)}(t) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} r_k e^{i(kt+\varphi_k)} \qquad r_k \in \mathbf{R}^+, \varphi_k \in \mathbf{R}. \tag{5.9}$$

La rappresentazione esponenziale è più semplice di quella in termini di seni e coseni ed il suo uso conduce a conti più agevoli. Nel caso di funzioni a valori reali la rappresentazione in termini di seni e coseni comunque consente di sviluppare la trattazione in ambito reale.

Confronto tra rappresentazioni spettrali alternative. Come abbiamo visto, questi sviluppi in serie sono equivalenti: si passa da una rappresentazione all'altra mediante semplici formule di trasformazione lineari dei coefficienti di Fourier (siano essi reali o complessi). I coefficienti a_k, b_k, c_k degli sviluppi di Fourier (5.6) e (5.8) dipendono linearmente dalla funzione f; questo invece non vale per i coefficienti $\rho_k, \theta_k, r_k, \varphi_k$ delle rappresentazioni (5.7) e (5.9), che sono ricavati dagli a_k, b_k, c_k mediante trasformazioni non lineari. Questo può rendere più conveniente la rappresentazione dello spettro in termini di a_k, b_k, c_k piuttosto che $\rho_k, \theta_k, r_k, \varphi_k$.

Funzioni con Periodo Diverso da 2π. Se f è periodica di periodo T, allora $\widetilde{f}(\tau) := f(T\tau/2\pi)$ è una funzione 2π-periodica, poiché

$$\widetilde{f}(\tau + 2\pi) = f(T(\tau + 2\pi)/2\pi) = f(T\tau/2\pi + T) = f(T\tau/2\pi) = \widetilde{f}(\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbf{R}.$$

Partendo dallo sviluppo in serie trigonometrica

$$S_{\widetilde{f}}(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau) \qquad \forall \tau \in \mathbf{R},$$

mediante la trasformazione di variabile $\tau \mapsto t := T\tau/(2\pi)$ si ha

$$S_f(t) = S_{\widetilde{f}}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin\frac{2k\pi}{T}t\right) \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\tau)\cos k\tau \, d\tau = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}t \, dt \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\tau)\sin k\tau \, d\tau = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}t \, dt \qquad \text{per } k = 1, 2, \dots$$

Pertanto tutti i risultati precedenti si estendono facilmente a S_f. Analogamente

$$S_f(t) = S_{\widetilde{f}}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{2\pi i k t/T} \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\tau) e^{-ik\tau} \, d\tau = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i k t/T} \, dt \qquad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{5.10}$$

6 Serie di Fourier in L^2

Finora abbiamo trattato la teoria delle serie di Fourier per funzioni continue, o continue a tratti. Adesso illustriamo la teoria negli spazi funzionali L^p e negli spazi di successioni ℓ^p.

Incominciamo da un risultato molto semplice.

Proposizione 6.1. *(i) Per ogni funzione $f \in L^1(-\pi, \pi)$, la successione di coefficienti $\{c_k\}$ definita in* (4.7) *è limitata, e converge a zero per $|k| \to +\infty$ (ovvero, un elemento dello spazi di Banach c_0). Inoltre l'operatore $L^1(-\pi, \pi) \to c_0 : f \mapsto \{c_k\}$ è continuo.*

(ii) Per ogni successione di coefficienti $c = \{c_k\} \in \ell^1$, la corrispondente serie di Fourier $S_c = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}$ converge assolutamente ed uniformemente ad una funzione continua. Inoltre l'operatore $\ell^1 \to C^0([-\pi, \pi)]) : c \mapsto S_c$ è continuo. [Ex]

Dimostrazione. Se $f \in L^1(-\pi, \pi)$ allora la successione $c_k \to 0$ per il Teorema di Riemann-Lebesgue, che vedremo trattando la trasformazione di Fourier.

Per la parte (ii) basta osservare che $|c_k e^{ikt}| \leq |c_k|$ e questa successione sta in ℓ^1. □

Sappiamo che lo spazio di funzioni $L^2(-\pi, \pi)$ e lo spazio di successioni ℓ^2 sono entrambi dotati di prodotto scalare:

$$(f, g)_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[g(t)^*] \, dt \qquad \forall f, g \in L^2(-\pi, \pi), \tag{6.1}$$

$$(\{c_k\}, \{d_k\})_{\ell^2} := \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k d_k^* \qquad \forall \{c_k\}, \{d_k\} \in \ell^2. \tag{6.2}$$

Per le funzioni di $L^2(-\pi, \pi)$ ha senso scrivere le formule dei coefficienti di Fourier, poiché $L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$.

Teorema 6.2. *Ogni funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ è sviluppabile in serie di Fourier. Più precisamente, definiti i coefficienti $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ come in* (2.6), (2.7) *e (4.7), abbiamo*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R}, \tag{6.3}$$

nel senso della convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$. Ovvero, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} &\Big\| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\Big\|_{L^2} \to 0, \\ &\Big\| f(t) - \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikt}\Big\|_{L^2} \to 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Inoltre l'operatore $L^2(-\pi,\pi) \to \ell^2 : f \mapsto \{c_k\}$ ed il suo inverso sono lineari e continui.

Si noti che in generale la convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$ implica la convergenza quasi dappertutto di una opportuna sottosuccessione, ma non di tutta la successione. [15]

Formule analoghe valgono per le rappresentazioni (5.7) e (5.9).

Dimostrazione. Il teorema si basa sulla teoria delle serie di Fourier astratte negli spazi di Hilbert.

(Grazie al teorema di Weierstrass-Stone,) si può dimostrare che la famiglia $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ è una base ortogonale di $L^2(-\pi,\pi)$. Per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$, $\{c_k(f) = (f, e^{ikt})_{L^2}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ è la famiglia dei suoi coefficienti di Fourier in $L^2(-\pi,\pi)$. Questo significa esattamente quanto affermato nella tesi. □

Vediamo ora che l'operazione che trasforma una funzione di $L^2(-\pi,\pi)$ nei suoi coefficienti di Fourier stabilisce una corrispondenza particolarmente interessante tra gli spazi di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$ e ℓ^2.

Teorema 6.3. *(di Parseval) Siano $f, \widetilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$, e siano*

$$S_f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R} \tag{6.5}$$

$$S_{\widetilde{f}}(t) := \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k \cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widetilde{c}_k e^{ikt} \qquad q\forall t \in \mathbf{R} \tag{6.6}$$

i rispettivi sviluppi in serie di Fourier (nel senso della convergenza in $L^2(-\pi,\pi)$). Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{f}(t)^*\, dt = \frac{\pi}{2} a_0 \widetilde{a}_0^* + \pi \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \widetilde{a}_k^* + b_k \widetilde{b}_k^*) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \widetilde{c}_k^* \ (\in \mathbf{C}), \tag{6.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2 \ (\in \mathbf{R}^+). \tag{6.8}$$

Pertanto

$$|c_k| \to 0 \qquad \text{per } k \to +\infty \text{ (disuguaglianza di Bessel)}, \tag{6.9}$$

[15] Comunque, per via del sullodato risultato di Carleson del 1966, la serie di Fourier di ogni funzione di $L^2(-\pi,\pi)$ converge per quasi ogni $t \in\,]-\pi,\pi[$.

Il quadrato della norma in $L^2(-\pi,\pi)$ di un segnale ne rappresenta la potenza (ovvero, energia per l'unità di tempo). Pertanto la (6.8) esprime l'uguaglianza tra la potenza del segnale periodico f e la somma delle potenze delle sue componenti armoniche.

Dimostrazione. Per verificare la prima uguaglianza di (6.7), basta scrivere $f(t)\widetilde{f}(t)^*$ in termini dei coefficienti di Fourier $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, sviluppare il prodotto, quindi integrare ed usare le proprietà di ortogonalità (2.2)—(2.4). Analogamente grazie alla (4.6)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{f}(t)^*\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}\Big)\Big(\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widetilde{c}_\ell^{\,*} e^{-i\ell t}\Big)\,dt \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} c_k\widetilde{c}_\ell^{\,*}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)t}\,dt = 2\pi\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\widetilde{c}_k^{\,*} = 2\pi\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2.\end{aligned}$$

Ancora una volta abbiamo scambiato le operazioni di serie e di integrale; in $L^2(-\pi,\pi)$ questo è del tutto lecito. Infine ponendo $\widetilde{f}=f$ nella (6.7) si ottiene la (6.8).

In altri termini: per i polinomi trigonometrici il risultato e' di verifica immediata; le corrispondenti serie convergono per via dell'appartenenza delle rispettive successioni allo spazio $L^2(-\pi,\pi)$ o ℓ^2. $\square$

Corollario 6.4. *La trasformazione T che manda f nel suo spettro $\{c_k\}$ è un isomorfismo isometrico tra gli spazi di Hilbert $L^2(-\pi,\pi)$ e ℓ^2.*

Il prossimo risultato lega l'operazione di derivazione delle funzioni (derivabili) periodiche e l'espansione in serie di Fourier. Questo è uno dei principali risultati di questa teoria, per altro già ricca.

Teorema 6.5. *Sia $f\in L^2(-\pi,\pi)$ e sia (6.3) il suo sviluppo in serie di Fourier formale. Se f è assolutamente continua e $f'\in L^2(-\pi,\pi)$, allora pure f' è sviluppabile in serie di Fourier in questo spazio, e*

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k\sin kt + b_k\cos kt) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} ikc_k e^{ikt} \qquad q\forall t\in\mathbf{R}. \tag{6.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2\,dt = \pi\sum_{k=1}^{\infty} k^2(|a_k|^2+|b_k|^2) = 2\pi\sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2|c_k|^2\ (<+\infty). \tag{6.11}$$

Analogamente, per ogni intero $n\ge 1$, se $f,...,f^{(n-1)}$ sono assolutamente continue e $f,...,f^{(n)}\in L^2(-\pi,\pi)$, allora [16]

$$f^{(n)}(t) = ... = \sum_{k\in\mathbf{Z}}(ik)^n c_k e^{ikt} \qquad q\forall t\in\mathbf{R}, \tag{6.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(n)}(t)|^2\,dt = \pi\sum_{k=1}^{\infty} k^n(|a_k|^2+|b_k|^2) = 2\pi\sum_{k\in\mathbf{Z}} k^n|c_k|^2\ (<+\infty). \tag{6.13}$$

Pertanto, affinché esista la derivata n-esima, quanto più alto è l'ordine n di derivazione, tanto più rapidamente lo spettro deve convergere a zero all'infinito (ovvero per $k\to+\infty$ nel caso di $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$; per $k\to\pm\infty$ nel caso dei $\{c_k\}$). E viceversa.

[16] Omettiamo la rppresentazione della derivata n-esima della serie di Fourier in termini di seni e coseni perché richiederebbe una distinzione dei diversi valori di n, in quanto la derivazione trasforma seni in coseni e viceversa. È invece molto agevole derivare la serie di Fourier formale in forma esponenziale, poiché la derivata di un esponenziale è un esponenziale: questo è uno dei vari vantaggi offerti da tale rappresentazione.

Osservazione. In particolare, se $\sum_{k\in\mathbf{Z}} k|c_k|^2$ converge allora $f, f' \in L^2(-\pi,\pi)$. Questo implica che f sia assolutamente continua. (Tra l'altro $f(-\pi) = f(\pi)$, poiché in effetti t varia lungo la circonferenza...)

Serie di Fourier astratte. In ogni spazio di Hilbert (separabile) H si definiscono le *serie di Fourier astratte.* Queste consistono nella rappresentazione di ogni $u \in H$ nella forma $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ (nel senso della convergenza in H, ovviamente); qui $\{u_k\}$ è una base ortonormale di H, e $a_k = (u, u_k)_H$ for ogni k. Se poi $H = L^2(-\pi,\pi)$ e $\{u_k\}$ è la famiglia delle funzioni trigonometriche (normalizzate), allora ritroviamo la serie di Fourier classica.

7 Method of Variable Separation for PDEs

The theory of Fourier series is at the basis of the classical *method of separation of variables* for the solution of PDEs (= partial differential equations) — more specifically, of certain PDEs with constant coefficients in domains with special symmetries (e.g., a Cartesian product of intervals).

For instance, let us consider the following boundary-value problem for the Laplace equation:

$$\begin{aligned} &Au := D_x^2 u + D_y^2 u = 0 \qquad \text{in }]0,\pi[\times]0,\pi[,\\ &u(0,y) = 0, \qquad u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in]0,\pi[,\\ &u(x,0) = 0, \qquad u(x,\pi) = g(x) \qquad \forall x \in]0,\pi[, \end{aligned} \tag{7.1}$$

for a prescribed function $g \in C^0([0,\pi])$.

Let us first look for real-valued solutions of the PDE of the form $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Assuming that $u(x,y) \neq 0$ for any (x,y), [17] we get

$$0 = \frac{Au}{u} = \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad \forall (x,y). \tag{7.2}$$

As $X''(x)/X(x)$ ($Y''(y)/Y(y)$, resp.) does not depend on y (x, resp.), we infer that

$$\exists C \in \mathbf{R}: \qquad -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = C \qquad \forall (x,y), \tag{7.3}$$

that is, the following system of two ODEs (= ordinary differential equations):

$$X''(x) = -CX(x) \qquad \forall x \in]0,\pi[, \qquad Y''(y) = CY(y) \qquad \forall y \in]0,\pi[. \tag{7.4}$$

We know that the general solution of the first equation is of the form

$$X(x) = a\cos\sqrt{C}x + b\sin\sqrt{C}x \qquad \forall x \in]0,\pi[\ (a, b \in \mathbf{R}). \tag{7.5}$$

Because of $(7.1)_2$, we assume the boundary conditions

$$X(0) = 0, \qquad X(\pi) = 0, \tag{7.6}$$

whence

$$a = 0, \qquad b\sin\sqrt{C}\pi = 0. \tag{7.7}$$

[17] We may also relax this restriction, and just assume that $Au(x,y) \neq 0$ where $u(x,y) \neq 0$, so that the next formula still holds.

If $b = 0$, then $X(x) \equiv 0$, whence $u(x,y) \equiv 0$; this solution is of no interest, and actually above we excluded it. In order to get a nontrivial solution we need $\sin \sqrt{C}\pi = 0$; this holds iff $C > 0$ and $\sqrt{C} \in \mathbf{N}$. We thus have the linearly independent family $\{X_k\}$ of solutions, with

$$X_k(x) = \sin kx \qquad \forall x \in]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.8}$$

For $C = k^2$ ($\in \mathbf{N}$), the other ODE of (7.4) reads

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0, \tag{7.9}$$

which has the general solution

$$Y(y) = a \cos iky + b \sin iky \qquad \forall y \in]0,\pi[\ (a, b \in \mathbf{R}), \tag{7.10}$$

or equivalently,

$$Y(y) = a \cosh ky - b \sinh ky \qquad \forall y \in]0,\pi[. \tag{7.11}$$

By prescribing the boundary condition $Y(0) = 0$, we get $a = 0$; this yields the following linearly independent family $\{Y_k\}$ of solutions:

$$Y_k(y) = \sinh ky \qquad \forall x \in]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.12}$$

(We are not yet prescribing any condition on Y for $y = \pi$.)

In conclusion, the linearly independent functions

$$u_k(x,y) = X_k(x) Y_k(y) = \sin kx \sinh ky \qquad \forall (x,y) \in]0,\pi[^2 \ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.13}$$

fulfill the system

$$\begin{aligned} & D_x^2 u_k + D_y^2 u_k = 0 \qquad \text{in }]0,\pi[\times]0,\pi[, \\ & u_k(0,y) = 0, \qquad u_k(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in]0,\pi[, \\ & u_k(x,0) = 0 \qquad \forall x \in]0,\pi[. \end{aligned} \tag{7.14}$$

At least formally, for any sequence $\{c_k\}$ in $\mathbf{R}$, the same then holds for the formal series

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \sinh ky \qquad \forall (x,y) \in]0,\pi[^2. \tag{7.15}$$

If this series of functions converges, then it solves the boundary-value problem (7.1) iff $u(x,\pi) = g(x)$ for any $x \in]0,\pi[$. Setting $\widetilde{c}_k = c_k \sinh k\pi$ for any k, this reads

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{c}_k \sin kx = g(x) \qquad \forall x \in]0,\pi[. \tag{7.16}$$

The $\widetilde{c}_k$s are thus the Fourier coefficients of g, provided that this function can be represented as a Fourier series of sines. This holds for the odd extension to $]-\pi,\pi[$ of any sufficiently regular $g :]0,\pi[\to \mathbf{R}$.

It is easily established that the solution of the problem (7.1) is unique.

This method of solution can be extended to other boundary conditions and to other equations, e.g.

$$D_x^2 u + D_y^2 u - D_t^2 u = 0, \qquad D_x^2 u + D_y^2 u - D_t u = 0, \qquad D_x^2 u - D_x^4 u = 0. \tag{7.17}$$

Other Boundary Conditions I. The method of separation of variables may also be applied to other boundary conditions. For instance, let us consider the following problem:

$$\begin{aligned}
&D_x^2 u + D_y^2 u = 0 \qquad \text{in }]0,\pi[\times]0,\pi[,\\
&u(0,y) = 0, \qquad D_x u(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in]0,\pi[,\\
&u(x,0) = 0, \qquad u(x,\pi) = g(x) \qquad \forall x \in]0,\pi[,
\end{aligned} \tag{7.18}$$

again for a prescribed function $g \in C^0([0,\pi])$.

One proceeds as above, searching for solutions of the PDE of the form $u(x,y) = X(x)Y(y)$. In this case the function X is assumed to solve the following problem

$$X''(x) = -CX(x), \qquad X(0) = 0, \qquad X'(\pi) = 0. \tag{7.19}$$

If $C = (k+1/2)^2$ for some $k \in \mathbf{N}$, this problem has the following linearly independent family $\{X_k\}$ of solutions

$$X_k(x) = \sin[(k+\tfrac{1}{2})x] \qquad \forall x \in]0,\pi[, \forall k \in \mathbf{N}. \tag{7.20}$$

Proceeding as above, we see that the linearly independent functions

$$u_k(x,y) = \sin[(k+\tfrac{1}{2})x]\sinh[(k+\tfrac{1}{2})y] \qquad \forall (x,y) \in]0,\pi[^2 \ (k \in \mathbf{N}) \tag{7.21}$$

fulfill the system

$$\begin{aligned}
&D_x^2 u_k + D_y^2 u_k = 0 \qquad \text{in }]0,\pi[\times]0,\pi[,\\
&u_k(0,y) = 0, \qquad D_x u_k(\pi,y) = 0 \qquad \forall y \in]0,\pi[,\\
&u_k(x,0) = 0 \qquad \forall x \in]0,\pi[.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

The general solution of this system thus reads

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin[(k+\tfrac{1}{2})x]\sinh[(k+\tfrac{1}{2})y] \qquad \forall (x,y) \in]0,\pi[^2. \tag{7.23}$$

This function solves the boundary-value problem (7.18) iff $u(x,\pi) = g(x)$ for any $x \in]0,\pi[$, and so on.

Now notice that, setting $t = x/2$, we have

$$\widetilde{X}_k(t) := X_k(2t) = \sin[(2k+1)t] \qquad \forall t \in]0,\pi/2[, \forall k \in\in \mathbf{N}. \tag{7.24}$$

We thus get all the odd terms of the sin series. For any $k \in \mathbf{N}$, the 2π-periodic extension f of the function $\widetilde{X}_k$ has two properties:

$$\text{(i) } f \text{ is odd,} \qquad \text{(ii) } t \mapsto f(t-\pi/2) \text{ is even.} \tag{7.25}$$

The Fourier coefficients $\{c_k\}$ may thus be determined in terms of those of g as above, after that g has been extended to a 2π-periodic function that fulfills the properties (i) and (ii).

The solution of the problem (7.18) is unique.

Exercise. What is the solution of problem (7.22) if the condition "$u(x,0) = 0 \ \ \forall x \in]0,\pi[$" is replaced by "$D_y u(x,0) = 0 \ \ \forall x \in]0,\pi[$"?