Sistemi dinamici discreti e caos

Andrea Pugliese

Percorso di eccellenza in matematica, 19-26 ottobre 2011

Argomenti toccati

Motivazioni

- indagini di Poincaré (fine ’800, inizio ’900) in meccanica celeste;

Motivazioni

- indagini di Poincaré (fine '800, inizio '900) in meccanica celeste;
- Lorenz ('960): modelli semplificati in meteorologia;

Motivazioni

- indagini di Poincaré (fine '800, inizio '900) in meccanica celeste;
- Lorenz ('960): modelli semplificati in meteorologia;
- May (1973): in ecologia modelli semplici a tempo discreto producono dinamiche complesse;

Esempi di sistemi dinamici discreti

$$x_n = f(x_{n-1}), \text{ dove } f : S \to S$$

S spazio metrico. Quindi $x_n = f^n(x_0)$.
Esempi:

- mappa logistica: $S = \mathbb{R}$, $f(x) = ax(1-x)$;

Esempi di sistemi dinamici discreti

$$x_n = f(x_{n-1}), \text{ dove } f : S \to S$$

S spazio metrico. Quindi $x_n = f^n(x_0)$.
Esempi:

- mappa logistica: $S = \mathbb{R}$, $f(x) = ax(1-x)$;
- traslazioni (o raddoppio) sulla circonferenza: $S = S^1 = \mathbb{R} \bmod 2\pi$, $T_\alpha(x) = x + \alpha$ (o $R(x) = 2x$);

Esempi di sistemi dinamici discreti

$$x_n = f(x_{n-1}), \text{ dove } f : S \to S$$

S spazio metrico. Quindi $x_n = f^n(x_0)$.
Esempi:

- mappa logistica: $S = \mathbb{R}$, $f(x) = ax(1-x)$;
- traslazioni (o raddoppio) sulla circonferenza: $S = S^1 = \mathbb{R} \bmod 2\pi$, $T_\alpha(x) = x + \alpha$ (o $R(x) = 2x$);
- dinamica simbolica (shift sullo spazio delle sequenze): $S = \Sigma_2 = \{s_0 s_1 \ldots s_k \ldots, s_j \in \{0,1\}\}$, $\sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = s_1 s_2 s_3 \ldots$.

Esplorazione numerica della logistica

Vedi foglio Maple

Definizioni base

- x^* è un *punto di equilibrio* se $f(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f;

Definizioni base

- x^* è un *punto di equilibrio* se $f(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f;
- x^* è un *punto periodico* (di periodo k) se $f^k(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f^k;

Definizioni base

- x^* è un *punto di equilibrio* se $f(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f;
- x^* è un *punto periodico* (di periodo k) se $f^k(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f^k;
- $\{f^k(x),\ k \geq 0\}$ si dice l'*orbita di* x; se x è un punto periodico, essa è costituita da un numero finito di punti e si dice un'*orbita periodica* o un ciclo.

Definizioni base

- x^* è un *punto di equilibrio* se $f(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f;
- x^* è un *punto periodico* (di periodo k) se $f^k(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f^k;
- $\{f^k(x),\ k \geq 0\}$ si dice l'*orbita di* x; se x è un punto periodico, essa è costituita da un numero finito di punti e si dice un'*orbita periodica* o un ciclo.
- Sia x^* un punto periodico di *periodo primo* k. Se

$$\lim_{n\to\infty} f^{kn}(x) = x^* \ ,$$

diremo che x è *asintotico* a x^*.

Definizioni base

- x^* è un *punto di equilibrio* se $f(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f;
- x^* è un *punto periodico* (di periodo k) se $f^k(x^*) = x^*$, ossia se è un punto fisso di f^k;
- $\{f^k(x),\ k \geq 0\}$ si dice l'*orbita di* x; se x è un punto periodico, essa è costituita da un numero finito di punti e si dice un'*orbita periodica* o un ciclo.
- Sia x^* un punto periodico di *periodo primo* k. Se

$$\lim_{n \to \infty} f^{kn}(x) = x^* \ ,$$

  diremo che x è *asintotico* a x^*.
- Un punto periodico x^* (di periodo primo k) è *attrattivo* se esiste un intorno U di x^* tale che ogni $x \in U$ è asintotico a x^*; è *repulsivo* se esiste un intorno U di x^* tale che per ogni $x \in U$ esiste n tale che $f^{kn}(x) \notin U$.

Stabilità

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia x^* un equilibrio per f.

Stabilità

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia x^* un equilibrio per f.

Proposizione

Se $|f'(x^*)| < 1$, x^* *è attrattivo; se* $|f'(x^*)| > 1$, x^* *è repulsivo.*

Stabilità

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia x^* un equilibrio per f.

Proposizione

Se $|f'(x^*)| < 1$, x^* *è attrattivo; se* $|f'(x^*)| > 1$, x^* *è repulsivo.*

Esempio

L'equilibrio $1 - \frac{1}{a}$ *per la mappa logistica è attrattivo per* $1 < a < 3$ *e repulsivo per* $a > 3$.

Stabilità

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia x^* un equilibrio per f.

Proposizione

Se $|f'(x^*)| < 1$, x^* *è attrattivo; se* $|f'(x^*)| > 1$, x^* *è repulsivo.*

Esempio

L'equilibrio $1 - \frac{1}{a}$ *per la mappa logistica è attrattivo per* $1 < a < 3$ *e repulsivo per* $a > 3$.

Sia x^* un punto periodico (di primo periodo k) per f.

Proposizione

Se $|(f^k)'(x^*)| < 1$, x^* *è attrattivo; se* $|(f^k)'(x^*)| > 1$, x^* *è repulsivo.*

Stabilità

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile. Sia x^* un equilibrio per f.

Proposizione

Se $|f'(x^*)| < 1$, x^* è attrattivo; se $|f'(x^*)| > 1$, x^* è repulsivo.

Esempio

L'equilibrio $1 - \frac{1}{a}$ per la mappa logistica è attrattivo per $1 < a < 3$ e repulsivo per $a > 3$.

Sia x^* un punto periodico (di primo periodo k) per f.

Proposizione

Se $|(f^k)'(x^*)| < 1$, x^* è attrattivo; se $|(f^k)'(x^*)| > 1$, x^* è repulsivo.

Esempio

La mappa logistica ha un punto di primo periodo 2 per $a > 3$, attrattivo per $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ e repulsivo per $a > 1 + \sqrt{6}$.

I teoremi di Sarkovskii (1964)

Theorem

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se f ammette un punto periodico di periodo 3, allora ammette punti periodici di primo periodo k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

I teoremi di Sarkovskii (1964)

Theorem

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se f ammette un punto periodico di periodo 3, allora ammette punti periodici di primo periodo k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione non è difficile.

I teoremi di Sarkovskii (1964)

Theorem

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se f ammette un punto periodico di periodo 3, allora ammette punti periodici di primo periodo k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione non è difficile.
Si può generalizzare come segue. Ordiniamo i numeri naturali come segue:

$$3 > 5 > 7 > \cdots 2 \cdot 3 > 2 \cdot 5 > \cdots > 2^2 \cdot 3 > 2^2 \cdot 5 > \cdots$$
$$\cdots > 2^n \cdot 3 > 2^n \cdot 5 > \cdots > 2^k > \cdots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1.$$

I teoremi di Sarkovskii (1964)

Theorem

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se f ammette un punto periodico di periodo 3, allora ammette punti periodici di primo periodo k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione non è difficile.
Si può generalizzare come segue. Ordiniamo i numeri naturali come segue:

$$3 > 5 > 7 > \cdots 2 \cdot 3 > 2 \cdot 5 > \cdots > 2^2 \cdot 3 > 2^2 \cdot 5 > \cdots$$
$$\cdots > 2^n \cdot 3 > 2^n \cdot 5 > \cdots > 2^k > \cdots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1.$$

Theorem

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se f ammette un punto periodico di primo periodo m e $m > k$ (nell'ordinamento sopra), allora ammette un punto periodico di primo periodo k.

Esempio

Per $a = 3.83$, la mappa logistica ammette un'orbita periodica di periodo 3 attrattiva.

Esempio

Per $a = 3.83$, la mappa logistica ammette un'orbita periodica di periodo 3 attrattiva. Al computer non si vedono altre soluzioni periodiche. (vedi ultima parte del foglio Maple)

Esempio

Per $a = 3.83$, la mappa logistica ammette un'orbita periodica di periodo 3 attrattiva. Al computer non si vedono altre soluzioni periodiche. (vedi ultima parte del foglio Maple)

Si ha infatti

Theorem (Fatou)

Se il polinomio quadratico $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha un'orbita periodica attrattiva, il punto critico $-\frac{b}{2a}$ è asintotico a tale orbita. In particolare, esiste al più un'orbita periodica attrattiva.

Definizione di caos (Devaney)

Una mappa $f : S \to S$, S spazio metrico è *caotica* se:

- f esibisce dipendenza sensibile[1] dai dati iniziali [imprevedibilità (*effetto battito d'ali di farfalla*)].

Definizioni

1. cioè esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $\forall\, x \in S$ e per ogni intorno U di x esiste $p \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ t.c. $d[f^k(x), f^k(p)] > \varepsilon$.

Definizione di caos (Devaney)

Una mappa $f : S \to S$, S spazio metrico è *caotica* se:

- f esibisce dipendenza sensibile[1] dai dati iniziali [imprevedibilità (*effetto battito d'ali di farfalla*)].
- f è topologicamente transitiva[2] (o mixing) [indecomponibilità];

Definizioni

1. cioè esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $\forall\ x \in S$ e per ogni intorno U di x esiste $p \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ t.c. $d[f^k(x), f^k(p)] > \varepsilon$.
2. cioè $\forall\ U$ e V aperti di S esistono $x \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ t.c. $f^k(x) \in V$.

Definizione di caos (Devaney)

Una mappa $f : S \to S$, S spazio metrico è *caotica* se:

- f esibisce dipendenza sensibile[1] dai dati iniziali [imprevedibilità (*effetto battito d'ali di farfalla*)].
- f è topologicamente transitiva[2] (o mixing) [indecomponibilità];
- I punti periodici di f sono *densi*[3] in S [regolarità] ;

Definizioni

1. cioè esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $\forall\ x \in S$ e per ogni intorno U di x esiste $p \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ t.c. $d[f^k(x), f^k(p)] > \varepsilon$.
2. cioè $\forall\ U$ e V aperti di S esistono $x \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ t.c. $f^k(x) \in V$.
3. Un insieme $A \subset S$ è denso se $\forall\ x \in S$ e $\forall\ \varepsilon > 0$ esiste $p \in A$ tale che $d[x, p] < \varepsilon$.

Esempi di mappe caotiche

- Le traslazioni T_α sulla circonferenza con α e 2π incommensurabili sono topologicamente transitive, ma non hanno dipendenza sensibile.

Esempi di mappe caotiche

- Le traslazioni T_α sulla circonferenza con α e 2π incommensurabili sono topologicamente transitive, ma non hanno dipendenza sensibile.
- Il raddoppio $R(x) = 2x$ sulla circonferenza è caotico;

Esempi di mappe caotiche

- Le traslazioni T_α sulla circonferenza con α e 2π incommensurabili sono topologicamente transitive, ma non hanno dipendenza sensibile.
- Il raddoppio $R(x) = 2x$ sulla circonferenza è caotico;
  - infatti ogni piccolo arco si espande iterando R: quindi punti arbitrariamente vicini si vanno a trovare lontani;

Esempi di mappe caotiche

- Le traslazioni T_α sulla circonferenza con α e 2π incommensurabili sono topologicamente transitive, ma non hanno dipendenza sensibile.
- Il raddoppio $R(x) = 2x$ sulla circonferenza è caotico;
  - infatti ogni piccolo arco si espande iterando R: quindi punti arbitrariamente vicini si vanno a trovare lontani;
  - quindi da ogni piccolo arco si arriva in qualunque punto della circonferenza;

Esempi di mappe caotiche

- Le traslazioni T_α sulla circonferenza con α e 2π incommensurabili sono topologicamente transitive, ma non hanno dipendenza sensibile.
- Il raddoppio $R(x) = 2x$ sulla circonferenza è caotico;
  - infatti ogni piccolo arco si espande iterando R: quindi punti arbitrariamente vicini si vanno a trovare lontani;
  - quindi da ogni piccolo arco si arriva in qualunque punto della circonferenza;
  - i punti periodici di periodo n corrispondono alle radici (2^{n-1}) dell'unità, quindi sono densi.

Esempi di mappe caotiche

- Le traslazioni T_α sulla circonferenza con α e 2π incommensurabili sono topologicamente transitive, ma non hanno dipendenza sensibile.
- Il raddoppio $R(x) = 2x$ sulla circonferenza è caotico;
  - infatti ogni piccolo arco si espande iterando R: quindi punti arbitrariamente vicini si vanno a trovare lontani;
  - quindi da ogni piccolo arco si arriva in qualunque punto della circonferenza;
  - i punti periodici di periodo n corrispondono alle radici (2^{n-1}) dell'unità, quindi sono densi.
- Lo shift sullo spazio delle sequenze Σ_2 è caotico.

Dinamica simbolica

- Un punto periodico di periodo n è $\tilde{s} = (s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 \dots)$.

Dinamica simbolica

- Un punto periodico di periodo n è $\tilde{s} = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_0 \ldots)$.
- Dato un punto arbitrario $s = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_n s_{n+1} \ldots)$, $d[s, \tilde{s}] < 2^{-n}$; quindi i punti periodici sono densi.

Dinamica simbolica

- Un punto periodico di periodo n è $\tilde{s} = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_0 \ldots)$.
- Dato un punto arbitrario $s = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_n s_{n+1} \ldots)$, $d[s, \tilde{s}] < 2^{-n}$; quindi i punti periodici sono densi.
- Sia $s^* =$
  $$(\underbrace{0\ 1}_{\text{1–blocchi}} \mid \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{2–blocchi}} \mid \underbrace{000\ 001 \cdots}_{\text{3–blocchi}} \mid \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{4–blocchi}} \quad \cdots).$$
  L'orbita da s^* è densa. Infatti dato un qualunque $s \in \Sigma_2$ e $n > 0$ una qualche iterata di s^* coinciderà con s per le prime n cifre.
  Ne segue che σ è topologicamente transitiva.

Dinamica simbolica

- Un punto periodico di periodo n è $\tilde{s} = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_0 \ldots)$.
- Dato un punto arbitrario $s = (s_0 s_1 \ldots s_{n-1} s_n s_{n+1} \ldots)$, $d[s, \tilde{s}] < 2^{-n}$; quindi i punti periodici sono densi.
- Sia $s^* =$
  $$(\underbrace{0\ 1}_{1\text{–blocchi}} \mid \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{2\text{–blocchi}} \mid \underbrace{000\ 001 \cdots}_{3\text{–blocchi}} \mid \underbrace{\cdots\cdots}_{4\text{–blocchi}} \ \cdots).$$
  L'orbita da s^* è densa. Infatti dato un qualunque $s \in \Sigma_2$ e $n > 0$ una qualche iterata di s^* coinciderà con s per le prime n cifre.
  Ne segue che σ è topologicamente transitiva.
- Dato $s \in \Sigma_2$ e $\delta > 0$, scegliamo n tale che $2^{-n} < \delta$ e t che coincide con s per le prime n cifre e differisce in tutte le successive; si ha $d[s, t] < 2^{-n}$ ma $d[\sigma^n(s), \sigma^n(t)] = 1$, il massimo possibile in Σ_2.
  Quindi σ ha dipendenza sensibile dai dati iniziali.

Sistemi coniugati topologicamente

Siano S e T spazi metrici, $f : S \to S$ e $g : T \to T$.
f e g sono *topologicamente coniugate* se esiste un omeomorfismo $\tau : S \to T$ tale che

$$\tau \circ f = g \circ \tau.$$

Sistemi coniugati topologicamente

Siano S e T spazi metrici, $f : S \to S$ e $g : T \to T$.
f e g sono *topologicamente coniugate* se esiste un omeomorfismo $\tau : S \to T$ tale che

$$\tau \circ f = g \circ \tau.$$

Proposizione

Siano f e g topologicamente coniugate. Allora f è caotica su S se e solo se g è caotica su T.

La mappa logistica per $a > 2 + \sqrt{5}$

Nota: se $a > 4$ $f([0,1]) \not\subset [0.1]$.

[1]chiuso; non contiene intervalli; senza punti isolati

La mappa logistica per $a > 2 + \sqrt{5}$

Nota: se $a > 4$ $f([0,1]) \not\subset [0.1]$.
Definisco $\Lambda_1 = \{x : f(x) \in [0,1]\}$. Si ha

$$\Lambda_1 = I_0 \cup I_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, 1\right].$$

[1] chiuso; non contiene intervalli; senza punti isolati

La mappa logistica per $a > 2 + \sqrt{5}$

Nota: se $a > 4$ $f([0,1]) \not\subset [0.1]$.
Definisco $\Lambda_1 = \{x : f(x) \in [0,1]\}$. Si ha

$$\Lambda_1 = I_0 \cup I_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, 1\right].$$

$\Lambda_n = \{x : f^n(x) \in [0,1]\}$, $\Lambda = \cap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$. Λ_n è l'unione di 2^n intervalli chiusi disgiunti; Λ è un insieme di Cantor[1].
Considero $f : \Lambda \to \Lambda$

[1] chiuso; non contiene intervalli; senza punti isolati

La mappa logistica per $a > 2 + \sqrt{5}$

Nota: se $a > 4$ $f([0,1]) \not\subset [0.1]$.
Definisco $\Lambda_1 = \{x : f(x) \in [0,1]\}$. Si ha

$$\Lambda_1 = I_0 \cup I_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, 1\right].$$

$\Lambda_n = \{x : f^n(x) \in [0,1]\}$, $\Lambda = \cap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$. Λ_n è l'unione di 2^n intervalli chiusi disgiunti; Λ è un insieme di Cantor[1].
Considero $f : \Lambda \to \Lambda$; è topologicamente coniugata a σ su Σ_2.

$$\tau(x) = (s_0 s_1 \dots s_n \dots), \;\; s_j = 0 \text{ se } f^j(x) \in I_0, \; s_j = 1 \text{ se } f^j(x) \in I_1.$$

[1] chiuso; non contiene intervalli; senza punti isolati

La mappa logistica per $a > 2 + \sqrt{5}$

Nota: se $a > 4$ $f([0,1]) \not\subset [0.1]$.
Definisco $\Lambda_1 = \{x : f(x) \in [0,1]\}$. Si ha

$$\Lambda_1 = I_0 \cup I_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2a}, 1\right].$$

$\Lambda_n = \{x : f^n(x) \in [0,1]\}$, $\Lambda = \cap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$. Λ_n è l'unione di 2^n intervalli chiusi disgiunti; Λ è un insieme di Cantor[1].
Considero $f : \Lambda \to \Lambda$; è topologicamente coniugata a σ su Σ_2.

$$\tau(x) = (s_0 s_1 \dots s_n \dots), \;\; s_j = 0 \text{ se } f^j(x) \in I_0, \; s_j = 1 \text{ se } f^j(x) \in I_1.$$

Dimostrazione un po' laboriosa, ma non difficile.

[1] chiuso; non contiene intervalli; senza punti isolati

La mappa logistica per $a = 4$

"Coniugazione" di $f(x) = 4x(1-x)$
con il raddoppio R sulla circonferenza

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_1 & : & S^1 & \to & [-1,1], & \tau_1(\vartheta) & = & \cos(\vartheta) \\ q & : & [-1,1] & \to & [-1,1], & q(x) & = & 2x^2 - 1. \end{array}$$

Si ha $\tau_1 \circ R = q \circ \tau_1$ $[\cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1]$.

La mappa logistica per $a = 4$

"Coniugazione" di $f(x) = 4x(1-x)$
con il raddoppio R sulla circonferenza

$$\begin{array}{rcccclcl} \tau_1 & : & S^1 & \to & [-1,1], & \tau_1(\vartheta) & = & \cos(\vartheta) \\ q & : & [-1,1] & \to & [-1,1], & q(x) & = & 2x^2 - 1. \end{array}$$

Si ha $\tau_1 \circ R = q \circ \tau_1$ $[\cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1]$.

$$\tau_2 \ : \ [-1,1] \to [0,1], \quad \tau_2(x) = \frac{1}{2}(1-x).$$

Si ha $\tau_2 \circ q = f \circ \tau_2$

La mappa logistica per $a = 4$

"Coniugazione" di $f(x) = 4x(1-x)$
con il raddoppio R sulla circonferenza

$$\begin{array}{rcccccl} \tau_1 & : & S^1 & \to & [-1,1], & \tau_1(\vartheta) & = & \cos(\vartheta) \\ q & : & [-1,1] & \to & [-1,1], & q(x) & = & 2x^2-1. \end{array}$$

Si ha $\tau_1 \circ R = q \circ \tau_1$ $[\cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1]$.

$$\tau_2 \quad : \quad [-1,1] \quad \to \quad [0,1], \quad \tau_2(x) \quad = \quad \frac{1}{2}(1-x).$$

Si ha $\tau_2 \circ q = f \circ \tau_2$ e quindi $\tau_2 \circ \tau_1 \circ R = f \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

Da R caotica ne segue f caotica;

La mappa logistica per $a = 4$

"Coniugazione" di $f(x) = 4x(1-x)$
con il raddoppio R sulla circonferenza

$$\begin{array}{rcccccc} \tau_1 & : & S^1 & \to & [-1,1], & \tau_1(\vartheta) & = & \cos(\vartheta) \\ q & : & [-1,1] & \to & [-1,1], & q(x) & = & 2x^2 - 1. \end{array}$$

Si ha $\tau_1 \circ R = q \circ \tau_1$ $[\cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1]$.

$$\tau_2 \;:\; [-1,1] \;\to\; [0,1], \quad \tau_2(x) \;=\; \tfrac{1}{2}(1-x).$$

Si ha $\tau_2 \circ q = f \circ \tau_2$ e quindi $\tau_2 \circ \tau_1 \circ R = f \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

Da R caotica ne segue f caotica;non sono topologicamente coniugati perché τ_1 non è un omeomorfismo (è due-a-uno).

La mappa logistica per $a = 4$

"Coniugazione" di $f(x) = 4x(1-x)$
con il raddoppio R sulla circonferenza

$$\begin{array}{rcccccc} \tau_1 & : & S^1 & \to & [-1,1], & \tau_1(\vartheta) & = & \cos(\vartheta) \\ q & : & [-1,1] & \to & [-1,1], & q(x) & = & 2x^2-1. \end{array}$$

Si ha $\tau_1 \circ R = q \circ \tau_1$ $[\cos(2\vartheta) = 2\cos^2(\vartheta) - 1]$.

$$\tau_2 \quad : \quad [-1,1] \quad \to \quad [0,1], \quad \tau_2(x) \quad = \quad \frac{1}{2}(1-x).$$

Si ha $\tau_2 \circ q = f \circ \tau_2$ e quindi $\tau_2 \circ \tau_1 \circ R = f \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

Da R caotica ne segue f caotica;non sono topologicamente coniugati perché τ_1 non è un omeomorfismo (è due-a-uno).

Si può anche costruire una "coniugazione" con lo shift su Σ_2 definendo $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$ e

$$\tau(x) = (s_0 s_1 \ldots s_n \ldots), \;\; s_j = 0 \text{ se } f^j(x) \in I_0, \;\; s_j = 1 \text{ se } f^j(x) \in I_1.$$

Biforcazioni

Consideriamo una famiglia di funzioni f_μ dipendente da un parametro μ. Un punto di biforcazione è un valore μ_0 in cui cambia il comportamento qualitativo del sistema.

- Ad esempio la mappa logistica $f(x) = ax(1-x)$ ha un punto di biforcazione ad $a = 1$: per $a < 1$ c'è solo (in $[0, 1]$) l'equilibrio attrattivo $x = 0$, mentre per $a > 1$ $x = 0$ è repulsivo ed esiste un equilibrio attrattivo $x^* = 1 - \frac{1}{a}$ *(nota* $f_1'(0) = 1$*)*.

Biforcazioni

Consideriamo una famiglia di funzioni f_μ dipendente da un parametro μ. Un punto di biforcazione è un valore μ_0 in cui cambia il comportamento qualitativo del sistema.

- Ad esempio la mappa logistica $f(x) = ax(1-x)$ ha un punto di biforcazione ad $a = 1$: per $a < 1$ c'è solo (in $[0, 1]$) l'equilibrio attrattivo $x = 0$, mentre per $a > 1$ $x = 0$ è repulsivo ed esiste un equilibrio attrattivo $x^* = 1 - \frac{1}{a}$ *(nota* $f_1'(0) = 1$*)*.
- Si ha una seconda biforcazione ad $a = 3$: per $a < 3$ l'equilibrio x^* è attrattivo mentre per $a > 3$ è repulsivo ed esiste un'orbita di periodo 2 attrattiva *(nota* $f_3'(x^*) = -1$*)*.

Biforcazioni

Consideriamo una famiglia di funzioni f_μ dipendente da un parametro μ. Un punto di biforcazione è un valore μ_0 in cui cambia il comportamento qualitativo del sistema.

- Ad esempio la mappa logistica $f(x) = ax(1-x)$ ha un punto di biforcazione ad $a = 1$: per $a < 1$ c'è solo (in $[0,1]$) l'equilibrio attrattivo $x = 0$, mentre per $a > 1$ $x = 0$ è repulsivo ed esiste un equilibrio attrattivo $x^* = 1 - \frac{1}{a}$ *(nota $f_1'(0) = 1$)*.
- Si ha una seconda biforcazione ad $a = 3$: per $a < 3$ l'equilibrio x^* è attrattivo mentre per $a > 3$ è repulsivo ed esiste un'orbita di periodo 2 attrattiva *(nota $f_3'(x^*) = -1$)*.

Biforcazioni

Consideriamo una famiglia di funzioni f_μ dipendente da un parametro μ. Un punto di biforcazione è un valore μ_0 in cui cambia il comportamento qualitativo del sistema.

- Ad esempio la mappa logistica $f(x) = ax(1-x)$ ha un punto di biforcazione ad $a = 1$: per $a < 1$ c'è solo (in $[0,1]$) l'equilibrio attrattivo $x = 0$, mentre per $a > 1$ $x = 0$ è repulsivo ed esiste un equilibrio attrattivo $x^* = 1 - \frac{1}{a}$ *(nota $f_1'(0) = 1$)*.
- Si ha una seconda biforcazione ad $a = 3$: per $a < 3$ l'equilibrio x^* è attrattivo mentre per $a > 3$ è repulsivo ed esiste un'orbita di periodo 2 attrattiva *(nota $f_3'(x^*) = -1$)*.

Una biforcazione da un equilibrio $x^*(\mu)$ può avvenire solo quando $|f_{\mu_0}'(x^*(\mu_0))| = 1$.

Biforcazione di raddoppio del periodo

Il fenomeno visto per la mappa logistica è generico.

Theorem

Supponiamo

1. $f_\mu(0) = 0$ *per ogni* μ *(basta spostare l'origine).*
2. $f'_{\mu_0}(0) = -1$
3. $f'''_{\mu_0}(0) \neq 0$ *e* $\frac{\partial (f_\mu^2)'}{\partial \mu}|_{\mu=\mu_0}(0) \neq 0$

Biforcazione di raddoppio del periodo

Il fenomeno visto per la mappa logistica è generico.

Theorem

Supponiamo

1. $f_\mu(0) = 0$ *per ogni* μ *(basta spostare l'origine).*
2. $f'_{\mu_0}(0) = -1$
3. $f'''_{\mu_0}(0) \neq 0$ *e* $\frac{\partial (f_\mu^2)'}{\partial \mu}|_{\mu=\mu_0}(0) \neq 0$

Allora esiste un intervallo I *comprendente* 0 *e una funzione* $m : I \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$f_{m(x)}(x) \neq x, \qquad f^2_{m(x)}(x) = x.$$

Biforcazione di raddoppio del periodo

Il fenomeno visto per la mappa logistica è generico.

Theorem

Supponiamo

1. $f_\mu(0) = 0$ *per ogni* μ *(basta spostare l'origine).*
2. $f'_{\mu_0}(0) = -1$
3. $f'''_{\mu_0}(0) \neq 0$ *e* $\frac{\partial (f_\mu^2)'}{\partial \mu}|_{\mu=\mu_0}(0) \neq 0$

Allora esiste un intervallo I *comprendente* 0 *e una funzione* $m : I \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$f_{m(x)}(x) \neq x, \qquad f^2_{m(x)}(x) = x.$$

Le condizioni 3. sono *generiche*, ossia soddisfatte da quasi tutte le funzioni.

Cascata di biforcazioni di raddoppio del periodo

Applicando il risultato precedente a f^2 si ha che un punto di periodo 2 può diventare instabile facendo nascere un punto di periodo 4; e così via.

Cascata di biforcazioni di raddoppio del periodo

Applicando il risultato precedente a f^2 si ha che un punto di periodo 2 può diventare instabile facendo nascere un punto di periodo 4; e così via.

Un argomento grafico mostra che se f è unimodale, f^2 (ristretta ad un opportuno intervallo) ha le stesse proprietà.

Cascata di biforcazioni di raddoppio del periodo

Applicando il risultato precedente a f^2 si ha che un punto di periodo 2 può diventare instabile facendo nascere un punto di periodo 4; e così via.

Un argomento grafico mostra che se f è unimodale, f^2 (ristretta ad un opportuno intervallo) ha le stesse proprietà.

Rendendo rigoroso l'argomento, si è dimostrato:
Sia μ_n il valore di μ in cui l'orbita di periodo primo 2^n diventa instabile per la mappa logistica
$(\mu_0 = 3,\ \mu_1 = 2 + \sqrt{6} \approx 3.45)$. Allora

- $\lim_{n\to\infty} \mu_n \approx 3.57$.
- $\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} \approx 4.699$
- Quest'ultimo valore è indipendente dalla famiglia di funzioni unimodali, ed è detto *costante di Feigenbaum*.

Mappa di Poincaré

Per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie $y' = f(y)$ planari ($y \in \mathbb{R}^2$) vale il teorema di Poincaré-Bendixson: tutte le soluzioni sono asintotiche a un punto di equilibrio, o a un'orbita periodica o a un ciclo eteroclinico; il "caos" è impossibile.

Se $y \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, la dinamica può essere molto più complessa invece.

Si può ridurre lo studio di sistemi continui ad uno discreto tramite la mappa di Poincaré. Se γ è un'orbita chiusa di $y' = f(y)$, scegliamo una sezione Σ trasversa a γ e possiamo definire (in un intorno $U \subset \Sigma$ di $p = \Sigma \cap \gamma$) la mappa $\Phi : U \to U$ del primo ritorno.

La dinamica di $p_n = \Phi(p_{n-1})$ fornisce molte informazioni sugli attrattori di $y' = f(y)$.

L'equazione di Lorenz

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz \end{cases}$$

Per $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, tutte le soluzioni tendono ad uno stesso insieme molto complesso: *l'attrattore di Lorenz*.
(vedi foglio Maple)
Il sistema è troppo complesso per poterlo analizzare. Sul libro [3] viene presentato un sistema più semplice, ma con proprietà analoghe, in cui ci si può ridurre ad una dinamica discreta 1-dimensionale.

Altre letture

Per la teoria delle mappe discrete (specialmente in 1 dimensione), si può connsultare:

1. R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley (1987)
2. R.A. Holmgren *A first course in discrete dynamical systems*, Springer-Verlag (1994)

Sulle equazioni differenziali ordinarie e le relazioni con i sistemi discreti, si può consultare:

1. M.W. Hirsch, S. Smale and R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Academic Press (2004) [introduttivo]
2. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag (1983) [notevolmente più complesso]