Dynamical systems and Turing's Instability

S. Bonaccorsi

Department of Mathematics
University of Trento

Corso di *Mathematical Models for the Physical, Natural and Social Sciences*

Outline

1 Introduzione
- Prime definizioni

2 Linearizzazione
- Punti di equilibrio

3 L'analisi nel piano delle fasi

4 Turing's Instability.

Introduzione

Le equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali) vengono utilizzate come modello in un numero sorprendentemente elevato di applicazioni nelle scienze e nelle applicazioni, in meccanica, astronomia, fisica e numerosi altri campi.
Questo non è un caso: *ogni sistema dinamico sufficientemente regolare e stabile, con un numero finito di gradi di libertà, deve essere tradotto matematicamente in una equazione differenziale ordinaria* (J. Rauch, 2009).
Il termine "equazione differenziale" sembra sia stato introdotto da Gottfried Leibniz nel 1676. Lo studio di queste equazioni inizia infatti alla fine del XVII secolo, nell'analisi di alcuni problemi in meccanica e geometria.

Sistemi causali

Definizione

Un sistema dinamico è detto causale *se per ogni tempo t_0 lo stato del sistema al tempo t_0 determina univocamente lo stato a tutti i tempi $t \geq t_0$.*
Il sistema è detto continuo *se lo stato del sistema per tutti i tempi compresi in un intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$ dipende con continuità (in una opportuna topologia) dallo stato al tempo t_0.*
Il sistema è detto regolare *(smooth) se nell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$ lo stato dipende in maniera (infinitamente) differenziabile dallo stato iniziale al tempo t_0.*

Osservate che questa definizione resta piuttosto vaga sullo spazio a cui appartiene la soluzione così come sulle topologie necessarie per parlare di continuità e regolarità. Ciò che è davvero importante è l'idea di fondo.

Gradi di libertà

Definizione

Un sistema è detto avere un numero finito di gradi di libertà se il suo stato è determinato da un numero finito (diciamo N) di misurazioni reali.

I valori ottenuti tramite queste misure portano a costruire un insieme di punti nello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$, dove N è il numero di misurazioni. Gli stati possibili appartengono quindi ad un dominio in $\mathbb{R}^N$. Se facessimo sul sistema altre misurazioni, queste si potrebbero esprimere in funzione delle N misure che determinano il suo stato.

Gradi di libertà

Definizione

Se il minimo numero di misure che determinano lo stato del sistema è N, allora diremo che il sistema ha N gradi di libertà.

Noi supponiamo che il dominio che determina gli stati possibili sia un aperto in $\mathbb{R}^N$. Questo significa che dato un sistema in un certo stato, è sempre possibile pensare a un sistema in cui il valore degli N parametri è variato di poco e questo corrisponde a una piccola perturbazione del sistema.
In questo caso, le nozioni di continuità e regolarità possono essere prese dalle corrispondenti nozioni dello spazio euclideo.

Sistemi dinamici e equazioni differenziali

Supponiamo che un sistema abbia N gradi di libertà e che i suoi stati corrispondano ad un dominio aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
Supponiamo che il sistema sia causale e regolare, nel senso che per ogni $x_0 \in \Omega$ e ogni tempo t_0 esistono $t_1 > t_0$ e $r > 0$ tali che lo stato futuro del sistema, per ogni stato iniziale x vicino a x_0:

$$|x - x_0| < r$$

è descritto tramite una funzione $\varphi(t, t_0, x_0)$, definita per $t_0 \leq t \leq t_1$, a valori in Ω, che è una funzione differenziabile (infinite volte) nei suoi argomenti.

Sistemi dinamici e equazioni differenziali

Indichiamo con $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$. Poniamo

$$F(t, x) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(t,t,x)}.$$

F è la derivata rispetto al tempo della funzione φ calcolata sulla traiettoria che al tempo t passa per lo stato x. Questa definizione implica che le traiettorie del sistema causale soddisfano il sistema di equazioni differenziali

$$x' = F(t, x).$$

Ogni sistema causale con N gradi di libertà è descritto da un sistema di N equazioni differenziali del primo ordine.

Linearizzazione

Il sistema di equazioni differenziali che consideriamo è $x' = F(t, x)$. Noi siamo interessati a determinare il comportamento delle soluzioni che stanno vicino ad una soluzione fissata $X(t)$.
Supporremo di avere una qualche conoscenza di X; a volte, la soluzione di riferimento sarà molto semplice, per esempio un equilibrio.
Supponiamo di voler analizzare una soluzione che passa molto vicino a $X(t)$ al tempo $t = 0$. Scriviamo la soluzione come $x(t) = X(t) + \delta(t)$, dove $\delta(t)$ è supposta essere piccola. Le equazioni di $X(t)$ e $x(t)$ sono allora

$$X'(t) = F(t, X(t)), \qquad (X + \delta)'(t) = F(t, X(t) + \delta(t)).$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene l'equazione soddisfatta dalla perturbazione $\delta(t)$:

$$\delta'(t) = F(t, X(t) + \delta\, x(t)) - F(t, X(t)).$$

Finché si verifica che δ è una piccola perturbazione, si ottiene

$$F(t, X(t) + \delta(t)) - F(t, X(t)) \sim \partial_X F(t, X(t))\, \delta(t). \tag{1}$$

Linearizzazione

Il sistema di equazioni differenziali che consideriamo è $x' = F(t, x)$.
Noi siamo interessati a determinare il comportamento delle soluzioni che stanno vicino ad una soluzione fissata $X(t)$.
Supporremo di avere una qualche conoscenza di X; a volte, la soluzione di riferimento sarà molto semplice, per esempio un equilibrio.
Supponiamo di voler analizzare una soluzione che passa molto vicino a $X(t)$ al tempo $t = 0$. Scriviamo la soluzione come $x(t) = X(t) + \delta(t)$, dove $\delta(t)$ è supposta essere piccola. Le equazioni di $X(t)$ e $x(t)$ sono allora

$$X'(t) = F(t, X(t)), \qquad (X + \delta)'(t) = F(t, X(t) + \delta(t)).$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene l'equazione soddisfatta dalla perturbazione $\delta(t)$:

$$\delta'(t) = F(t, X(t) + \delta\, x(t)) - F(t, X(t)).$$

Finché si verifica che δ è una piccola perturbazione, si ottiene

$$F(t, X(t) + \delta(t)) - F(t, X(t)) \sim \partial_X F(t, X(t))\, \delta(t). \tag{1}$$

Linearizzazione

Si ottiene dunque che il gradiente di F rispetto a X, valutato nella soluzione di riferimento $X(t)$, può essere usato per approssimare l'equazione della perturbazione δ:

$$\delta'(t) \sim \partial_X F(t, X(t))\, \delta(t).$$

La perturbazione risulta allora essere una soluzione approssimata dell'equazione lineare

$$U'(t) = A(t)\, U(t), \qquad A(t) := \partial_X F(t, X(t)).$$

Questa equazione è detta *linearizzazione* o equazione variazionale per la soluzione del sistema dinamico.
Osservate che nell'approssimazione (1) abbiamo mantenuto solo i termini di primo ordine; una approssimazione migliore si ottiene considerando anche termini di grado superiore, al prezzo però di non avere più una equazione lineare.

Punti di equilibrio

Definizione

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *è un* punto di equilibrio *per l'equazione* $x' = F(x)$ *se* $F(x_0) = 0$. *In particolare, risulta* $x_0 = \varphi(t, t_0, x_0)$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è stabile se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* x *tale che* $|x - x_0| < \delta$ *abbiamo che* $|\varphi(t, t_0, x) - x_0| < \epsilon$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è instabile se non è stabile.*

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è asintoticamente stabile se è stabile e inoltre per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$ *vale* $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, t_0, x) - x_0| = 0$.

Punti di equilibrio

Definizione

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *è un* punto di equilibrio *per l'equazione* $x' = F(x)$ *se* $F(x_0) = 0$. *In particolare, risulta* $x_0 = \varphi(t, t_0, x_0)$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è stabile se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* x *tale che* $|x - x_0| < \delta$ *abbiamo che* $|\varphi(t, t_0, x) - x_0| < \epsilon$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Indicando con $B_r(x_0)$ un intorno di raggio r del punto x_0, questo equivale a dire che le soluzioni che partono da $B_\delta(x_0)$ restano in $B_\epsilon(x_0)$ per ogni tempo $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è instabile se non è stabile.*

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è asintoticamente stabile se è stabile e inoltre per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$ *vale* $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, t_0, x) - x_0| = 0$.

Punti di equilibrio

Definizione

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *è un* punto di equilibrio *per l'equazione* $x' = F(x)$ *se* $F(x_0) = 0$. *In particolare, risulta* $x_0 = \varphi(t, t_0, x_0)$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è stabile se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* x *tale che* $|x - x_0| < \delta$ *abbiamo che* $|\varphi(t, t_0, x) - x_0| < \epsilon$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è instabile se non è stabile.*

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è asintoticamente stabile se è stabile e inoltre per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$ *vale* $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, t_0, x) - x_0| = 0$.

Punti di equilibrio

Definizione

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *è un* punto di equilibrio *per l'equazione* $x' = F(x)$ *se* $F(x_0) = 0$. *In particolare, risulta* $x_0 = \varphi(t, t_0, x_0)$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è stabile se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* x *tale che* $|x - x_0| < \delta$ *abbiamo che* $|\varphi(t, t_0, x) - x_0| < \epsilon$ *per ogni* $t \in (t_0, t_1)$.

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è instabile se non è stabile.*

Definizione

Un punto di equilibrio x_0 *è asintoticamente stabile se è stabile e inoltre per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$ *vale* $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, t_0, x) - x_0| = 0$.

Punti di equilibrio

Definizione

Una radice x di $F(x) = 0$ è una radice semplice *se e solo se vale $F'(x) \neq 0$.*

- Sia X una radice semplice di $F(X) = 0$. Se $F'(X) < 0$ allora F cambia segno (da positivo a negativo) in un intorno di X all'aumentare di x. In questo caso, se ho una soluzione del sistema dinamico $x'(t) = F(x(t))$ che parte vicino al punto di equilibrio X, questa converge verso X al tendere del tempo $t \to \infty$. Il punto X è *asintoticamente stabile*.
- Nel caso sia $F'(X) > 0$, il punto di equilibrio attira le orbite al tendere del tempo $t \to -\infty$. Invece, per tempi t crescenti, le orbite sono "respinte". Il punto X è un punto di equilibrio instabile.
- Supponiamo che X non sia una radice semplice. Allora può succedere che le orbite siano attirate verso il punto di equilibrio su un lato ma siano respinte nell'altro lato; il punto si considera comunque un punto di equilibrio instabile.

Punti di equilibrio

Definizione

Una radice x di $F(x) = 0$ è una radice semplice *se e solo se vale $F'(x) \neq 0$.*

- Sia X una radice semplice di $F(X) = 0$. Se $F'(X) < 0$ allora F cambia segno (da positivo a negativo) in un intorno di X all'aumentare di x. In questo caso, se ho una soluzione del sistema dinamico $x'(t) = F(x(t))$ che parte vicino al punto di equilibrio X, questa converge verso X al tendere del tempo $t \to \infty$. Il punto X è *asintoticamente stabile*.
- Nel caso sia $F'(X) > 0$, il punto di equilibrio attira le orbite al tendere del tempo $t \to -\infty$. Invece, per tempi t crescenti, le orbite sono "respinte". Il punto X è un punto di equilibrio instabile.
- Supponiamo che X non sia una radice semplice. Allora può succedere che le orbite siano attirate verso il punto di equilibrio su un lato ma siano respinte nell'altro lato; il punto si considera comunque un punto di equilibrio instabile.

Punti di equilibrio

Definizione

Una radice x di $F(x) = 0$ è una radice semplice *se e solo se vale $F'(x) \neq 0$.*

- Sia X una radice semplice di $F(X) = 0$. Se $F'(X) < 0$ allora F cambia segno (da positivo a negativo) in un intorno di X all'aumentare di x. In questo caso, se ho una soluzione del sistema dinamico $x'(t) = F(x(t))$ che parte vicino al punto di equilibrio X, questa converge verso X al tendere del tempo $t \to \infty$. Il punto X è *asintoticamente stabile*.
- Nel caso sia $F'(X) > 0$, il punto di equilibrio attira le orbite al tendere del tempo $t \to -\infty$. Invece, per tempi t crescenti, le orbite sono "respinte". Il punto X è un punto di equilibrio instabile.
- Supponiamo che X non sia una radice semplice. Allora può succedere che le orbite siano attirate verso il punto di equilibrio su un lato ma siano respinte nell'altro lato; il punto si considera comunque un punto di equilibrio instabile.

Punti di equilibrio

Definizione

Una radice x di $F(x) = 0$ è una radice semplice *se e solo se vale $F'(x) \neq 0$.*

- Sia X una radice semplice di $F(X) = 0$. Se $F'(X) < 0$ allora F cambia segno (da positivo a negativo) in un intorno di X all'aumentare di x. In questo caso, se ho una soluzione del sistema dinamico $x'(t) = F(x(t))$ che parte vicino al punto di equilibrio X, questa converge verso X al tendere del tempo $t \to \infty$. Il punto X è *asintoticamente stabile*.
- Nel caso sia $F'(X) > 0$, il punto di equilibrio attira le orbite al tendere del tempo $t \to -\infty$. Invece, per tempi t crescenti, le orbite sono "respinte". Il punto X è un punto di equilibrio instabile.
- Supponiamo che X non sia una radice semplice. Allora può succedere che le orbite siano attirate verso il punto di equilibrio su un lato ma siano respinte nell'altro lato; il punto si considera comunque un punto di equilibrio instabile.

Flusso

Consideriamo il *flusso* $\varphi(t, x_0)$ che è il valore al tempo t della soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = x_0$. Dato che $x(t)$ soddisfa l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = F(x(t))$ porta a scrivere per φ il problema alle derivate parziali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t, \varphi(t, x_0)), \qquad \varphi(0, x_0) = x_0.$$

- Il teorema di esistenza e unicità per le soluzioni dei problemi di Cauchy implica in particolare che φ è una funzione continua e differenziabile, definita in un dominio aperto in $\mathbb{R}_{\{t\}} \times \mathbb{R}_{\{x_0\}}$.
- La soluzione potrebbe non essere definita in ogni punto, dato che potrebbe divergere all'infinito in un tempo finito.
- Se fissiamo t e consideriamo la funzione $x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$ che associa il valore iniziale alla soluzione al tempo t, otteniamo una mappa dall'asse x in sé che descrive cosa succede nella dinamica definita dal sistema nell'intervallo di tempo $(0, t)$.

Flusso

Consideriamo il *flusso* $\varphi(t, x_0)$ che è il valore al tempo t della soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = x_0$. Dato che $x(t)$ soddisfa l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = F(x(t))$ porta a scrivere per φ il problema alle derivate parziali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t, \varphi(t, x_0)), \qquad \varphi(0, x_0) = x_0.$$

- Il teorema di esistenza e unicità per le soluzioni dei problemi di Cauchy implica in particolare che φ è una funzione continua e differenziabile, definita in un dominio aperto in $\mathbb{R}_{\{t\}} \times \mathbb{R}_{\{x_0\}}$.
- La soluzione potrebbe non essere definita in ogni punto, dato che potrebbe divergere all'infinito in un tempo finito.
- Se fissiamo t e consideriamo la funzione $x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$ che associa il valore iniziale alla soluzione al tempo t, otteniamo una mappa dall'asse x in sé che descrive cosa succede nella dinamica definita dal sistema nell'intervallo di tempo $(0, t)$.

Flusso

Consideriamo il *flusso* $\varphi(t, x_0)$ che è il valore al tempo t della soluzione $x(t)$ con dato iniziale $x(0) = x_0$. Dato che $x(t)$ soddisfa l'equazione differenziale $\dot{x}(t) = F(x(t))$ porta a scrivere per φ il problema alle derivate parziali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t, \varphi(t, x_0)), \qquad \varphi(0, x_0) = x_0.$$

- Il teorema di esistenza e unicità per le soluzioni dei problemi di Cauchy implica in particolare che φ è una funzione continua e differenziabile, definita in un dominio aperto in $\mathbb{R}_{\{t\}} \times \mathbb{R}_{\{x_0\}}$.
- La soluzione potrebbe non essere definita in ogni punto, dato che potrebbe divergere all'infinito in un tempo finito.
- Se fissiamo t e consideriamo la funzione $x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$ che associa il valore iniziale alla soluzione al tempo t, otteniamo una mappa dall'asse x in sé che descrive cosa succede nella dinamica definita dal sistema nell'intervallo di tempo $(0, t)$.

Two by Two Linear Systems.

In the sequel, we consider linear constant coefficient systems

$$X' = AX, \tag{2}$$

where A is a real matrix with distinct non zero eigenvalues. The condition of distinct nonzero eigenvalues is stable under small perturbations of A.

Real Eigenvalues of Opposite Signs.

If A has real eigenvalues of opposite signs $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ then choosing nonzero real eigenvectors v_- and v_+ the general solution is

$$X(t) = \alpha_- \, e^{\lambda_- \, t} \, v_- + \alpha_+ \, e^{\lambda_+ \, t} \, v_+.$$

- The line $\mathbb{R} v_+$ is invariant under the flow. The flow at time t simply multiplies by $e^{\lambda_+ \, t}$ so points move outward exponentially. As $t \to -\infty$ they converge exponentially to 0. This line is called the unstable manifold.
- The line $\mathbb{R} v_-$ is also invariant and the flow is multiplication by $e^{\lambda_- \, t}$ so contracts exponentially toward the origin. This llne is called the stable manifold.

Real Eigenvalues of Opposite Signs.

If A has real eigenvalues of opposite signs $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ then choosing nonzero real eigenvectors v_- and v_+ the general solution is

$$X(t) = \alpha_- \, e^{\lambda_- \, t} \, v_- + \alpha_+ \, e^{\lambda_+ \, t} \, v_+.$$

- The line $\mathbb{R}v_+$ is invariant under the flow. The flow at time t simply multiplies by $e^{\lambda_+ \, t}$ so points move outward exponentially. As $t \to -\infty$ they converge exponentially to 0. This line is called the unstable manifold.
- The line $\mathbb{R}v_-$ is also invariant and the flow is multiplication by $e^{\lambda_- \, t}$ so contracts exponentially toward the origin. This llne is called the stable manifold.

Real Eigenvalues of Opposite Signs.

An integral curve off the stable and unstable manifolds comes in from the direction of $\mathbb{R}v_-$, turns and leaves approaching $\mathbb{R}v_+$ as $t \to \infty$. They have an aspect that is roughly hyperbolic.

Real Eigenvalues of Opposite Signs.

An integral curve off the stable and unstable manifolds comes in from the direction of $\mathbb{R}v_-$, turns and leaves approaching $\mathbb{R}v_+$ as $t \to \infty$. They have an aspect that is roughly hyperbolic.

To see that they are not hyperbolae, consider the case

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

The x (resp. y) axis is the stable (resp. unstable) manifold. The solution curves are $x(t) = x_0\, e^{\lambda_- t}$, $y(t) = y_0\, e^{\lambda_+ t}$ and the solution reamins in the same quadrant of (x_0, y_0). So, for positive initial conditions, it holds $x(t)^{\lambda_+} y(t)^{-\lambda_-} = x_0^{\lambda_+} y_0^{-\lambda_-}$ is constant; for the integral curves to be hyperbolas, it shall be $\lambda_- = -\lambda_+$.

Real Eigenvalues of Opposite Signs.

An integral curve off the stable and unstable manifolds comes in from the direction of $\mathbb{R}v_-$, turns and leaves approaching $\mathbb{R}v_+$ as $t \to \infty$. They have an aspect that is roughly hyperbolic.

Summary.

There are two invariant lines, in the directons of the eigenvectors. The flow is outward (resp. inward) in the direction of the eigenvector with positive (resp. negative) eigenvalues. The equilibrium is unstable. The other integral curves are asymptotic to the to these two lines resembling hyperbolas, but lacking their symmetry and quadric equation (unless $\lambda_- = -\lambda_+$). There is a nontrivial continuous integral of motion

Distinct real roots of the same sign.

Consider the case of positive roots $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. The general solution is $c_1\, e^{\lambda_1\, t} v_1 + c_2\, e^{\lambda_2\, t} v_2$; the lines in the directions of v_j are invariant and the flow is outward on both.

The invariant lines correspond to one or the other of c_1, c_2 vanishing. The expansion on the v_2 line is more rapid so that orbits tend in the limit $t \to \infty$ to be nearly parallel to v_2. For $t \to -\infty$ the $e^{\lambda_1\, t}$ term is dominant and the orbits approach the origin tangent to the v_1 line. Introducing the basis v_1, v_2 and corresponding coordinates α_1, α_2, there exist orthogonal matrices T and T^{-1} such that

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

and $\alpha_j(t) = c_j\, e^{\lambda_j\, t}$. The quantity $|\alpha_1|^{\lambda_2}/|\alpha_2|^{\lambda_1}$ is constant on orbits. Since $\lambda_2 > 0$ this is discontinous along the line $\alpha_1 = 0$. The orbits in x-space are their image by the linear transformation T^{-1}.

Distinct real roots of the same sign.

Consider the case of positive roots $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. The general solution is $c_1\, e^{\lambda_1\, t} v_1 + c_2\, e^{\lambda_2\, t} v_2$; the lines in the directions of v_j are invariant and the flow is outward on both.
The invariant lines correspond to one or the other of c_1, c_2 vanishing. The expansion on the v_2 line is more rapid so that orbits tend in the limit $t \to \infty$ to be nearly parallel to v_2. For $t \to -\infty$ the $e^{\lambda_1\, t}$ term is dominant and the orbits approach the origin tangent to the v_1 line.
Introducing the basis v_1, v_2 and corresponding coordinates α_1, α_2, there exist orthogonal matrices T and T^{-1} such that

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

and $\alpha_j(t) = c_j\, e^{\lambda_j\, t}$. The quantity $|\alpha_1|^{\lambda_2}/|\alpha_2|^{\lambda_1}$ is constant on orbits. Since $\lambda_2 > 0$ this is discontinous along the line $\alpha_1 = 0$. The orbits in x-space are their image by the linear transformation T^{-1}.

Distinct real roots of the same sign.

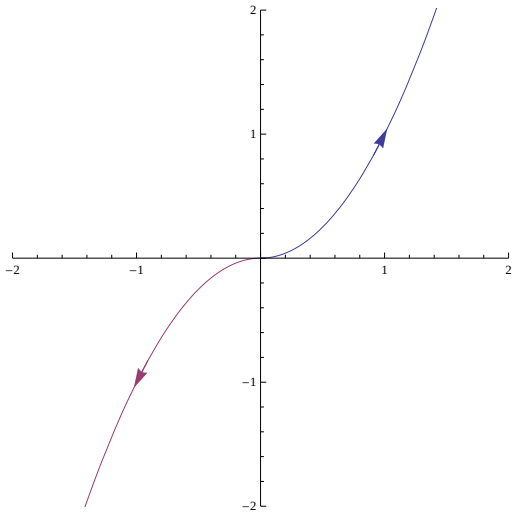
Consider the case of positive roots $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. The general solution is $c_1\, e^{\lambda_1\, t} v_1 + c_2\, e^{\lambda_2\, t} v_2$; the lines in the directions of v_j are invariant and the flow is outward on both.
The invariant lines correspond to one or the other of c_1, c_2 vanishing. The expansion on the v_2 line is more rapid so that orbits tend in the limit $t \to \infty$ to be nearly parallel to v_2. For $t \to -\infty$ the $e^{\lambda_1\, t}$ term is dominant and the orbits approach the origin tangent to the v_1 line.
Introducing the basis v_1, v_2 and corresponding coordinates α_1, α_2, there exist orthogonal matrices T and T^{-1} such that

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

and $\alpha_j(t) = c_j\, e^{\lambda_j\, t}$. The quantity $|\alpha_1|^{\lambda_2}/|\alpha_2|^{\lambda_1}$ is constant on orbits. Since $\lambda_2 > 0$ this is discontinous along the line $\alpha_1 = 0$. The orbits in x-space are their image by the linear transformation T^{-1}.

Distinct real roots of the same sign.

Orbits move away from the origin growing infinitely large. The origin is a source or repellor.



Summary.

There are two invariant lines. For positive real part, the flow is outgoing on both. The equilibrium is unstable. The line corresponding to the larger eigenvalue dominates for t large positive, while the other dominates for $t \to -\infty$. There are no nonconstant continuous conserved quantitites. The case of negative eigenvalues is analogous, generating a sink which is an attractor.

Centers and spirals. Complex conjugate eigenvalues.

Solutions are generated by $e^{\lambda\, t} v$, $e^{\bar{\lambda}\, t} \bar{v}$. Equivalently, by the real and imaginary parts of $e^{\lambda\, t} v$. Write $\lambda = a + i\, b$, $v = r + i\, s$, then $e^{\lambda\, t} v = e^{a\, t} e^{i\, b\, t} v$. The term $e^{i\, b\, t} v$ is of constant magnitude so there is exponential growth (resp. exponential decay) when $a > 0$ (resp. $a < 0$). The analysis is most conveniently done by considering first the case $a = 0$.

Centers. Eigenvalues $0 \neq \pm b\, i$.

Recall that $\lambda = i\, b$, $v = r + i\, s$. The general solution is

$$\alpha = (c_1 \cos(b\, t) + c_2 \sin(b\, t), -c_1 \sin(b\, t) + c_2 \cos(b\, t))$$

which implies $\alpha_1' = b\, \alpha_2$ and $\alpha_2' = -b\, \alpha_1$. Multiply the first equation by α_1, the second by α_2 and add to get

$$\alpha_1\, \alpha_1' + \alpha_2\, \alpha_2' = 0.$$

This proves that $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ is constant so the orbits are circles inthe α coordinates. The conserved quantity in the x-plane is

$$(s_2\, x - s_1\, y)^2 + (-r_2\, x + r_1\, y)^2$$

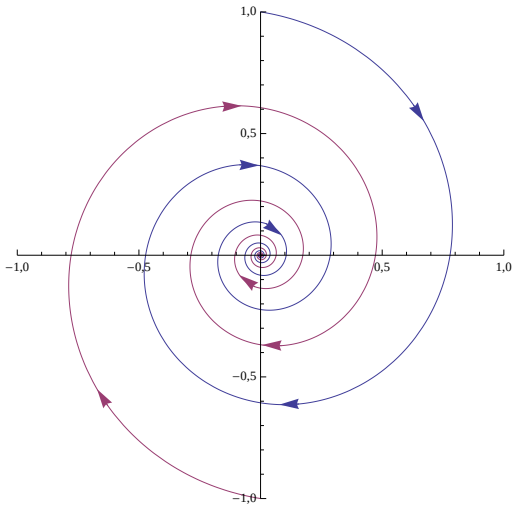
which are bounded conic sections, hence ellipses: the orbits in the x-coordinates are ellipses.

Summary.

For nonzero purely imaginary eigenvalues, the orbits are ellipses. There is a quadratic conserved quantity. The origin is a stable equilibrium. Under small real perturbations of A, the eigenvalues will typically leave the imaginary axis remaining a complex conjugate pair.

Spirals. Eigenvalues $a \pm i\,b$, $a \neq 0 \neq b$.

The solutions are exactly as in the preceding section just multiplied by $e^{a\,t}$. For $a > 0$ the orbits are ellipses amplified by an exponentially growing factor. They spiral out. For $a < 0$ they spiral in. The orbits in α-coordinates are given in next figure for $a = -1$:



Summary.

For $a > 0$ the orbits are elliptical spirals growing exponentially called a spiral source. For $a < 0$ they are elliptical spirals shrinking exponenetially, a spiral sink. There are no nonconstant continuous integrals of motion.

Turing's Instability.

Spontaneous Pattern Formation and Turing's Dream.

From cristals to snowflakes, from sunflowers to zebra stripes, from heartbeat to nerve tremors, nearly everywhere we find ordered structures and patterns that seem to arise "by themselves". How can shape and form bring themselves to bear from undifferentiated uniformity?
Alan Turing (1921 – 1954) in his work during the year 1952 developed ground-breaking insight into the problem of "self-organization" or "morphogenesis".

The Turing's instability is elementary and surprising. It asserts that there are linear constant coefficient linear dynamics

$$x'(t) = A\,x(t), \qquad \text{and} \qquad x'(t) = B\,x(t)$$

both strongly stable (in the sense that the eigenvalues of A and B lie in the left halfplane) and so that combining the effects, to yield $x'(t) = (A + B)\,x(t)$, leads to an unstable system.

Turing's Instability.

Let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

In the (x, y)-coordinates the equation is

$$x' = -\varepsilon\, y, \qquad y' = x.$$

It follows that the solution satisfies $x^2 + \varepsilon\, y^2 = c$ hence orbits are ellipses.

Similarly, let

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

In the (x, y)-coordinates the equation is

$$x' = y, \qquad y' = -\varepsilon\, x.$$

It follows that the solution satisfies $\varepsilon\, x^2 + y^2 = c$ hence orbits are again ellipses (this time with the long axis along the x axis).

Turing's Instability.

Let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

In the (x, y)-coordinates the equation is

$$x' = -\varepsilon\, y, \qquad y' = x.$$

It follows that the solution satisfies $x^2 + \varepsilon\, y^2 = c$ hence orbits are ellipses.
Similarly, let

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

In the (x, y)-coordinates the equation is

$$x' = y, \qquad y' = -\varepsilon\, x.$$

It follows that the solution satisfies $\varepsilon\, x^2 + y^2 = c$ hence orbits are again ellipses (this time with the long axis along the x axis).

Turing's Instability.

The matrix

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

is symmetric with eigenvalues $\pm(1-\varepsilon)$ of both signs, hence the sum dynamic is unstable.

Summary.

Two centered, stable dynamics can sum up to an unstable dynamics.

Another example.

Define $\tilde{A} = A - \delta\, I$, $\tilde{B} = B - \delta\, I$, $\delta << 1$; then $\tilde{A}$ and $\tilde{B}$ have eigenvalues with real parts equal to $-\delta$ (spiral sink). The eigenvalues of $(\tilde{A} + \tilde{B})$ are $-2\,\delta \pm (1-\varepsilon)$ so for $\delta < (1-\varepsilon)/2$ the larger is strictly positive: *two exponentially asymptotically stables can sum to an unstable.*

How much instability there will be?

If A and B are stable then $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \leq 0$ so the sum cannot have both eigenvalues with positive real parts.

Turing's Instability.

The matrix

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

is symmetric with eigenvalues $\pm(1-\varepsilon)$ of both signs, hence the sum dynamic is unstable.

Summary.

Two centered, stable dynamics can sum up to an unstable dynamics.

Another example.

Define $\tilde{A} = A - \delta\, I$, $\tilde{B} = B - \delta\, I$, $\delta << 1$; then $\tilde{A}$ and $\tilde{B}$ have eigenvalues with real parts equal to $-\delta$ (spiral sink). The eigenvalues of $(\tilde{A} + \tilde{B})$ are $-2\,\delta \pm (1-\varepsilon)$ so for $\delta < (1-\varepsilon)/2$ the larger is strictly positive: *two exponentially asymptotically stables can sum to an unstable.*

How much instability there will be?

If A and B are stable then $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \leq 0$ so the sum cannot have both eigenvalues with positive real parts.

Turing's Instability.

The matrix

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

is symmetric with eigenvalues $\pm(1-\varepsilon)$ of both signs, hence the sum dynamic is unstable.

Summary.

Two centered, stable dynamics can sum up to an unstable dynamics.

Another example.

Define $\tilde{A} = A - \delta\, I$, $\tilde{B} = B - \delta\, I$, $\delta << 1$; then $\tilde{A}$ and $\tilde{B}$ have eigenvalues with real parts equal to $-\delta$ (spiral sink). The eigenvalues of $(\tilde{A} + \tilde{B})$ are $-2\,\delta \pm (1-\varepsilon)$ so for $\delta < (1-\varepsilon)/2$ the larger is strictly positive: *two exponentially asymptotically stables can sum to an unstable.*

How much instability there will be?

If A and B are stable then $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \leq 0$ so the sum cannot have both eigenvalues with positive real parts.

Turing's Instability.

Theorem (Turing instability)

If $d > 1$ then knowing only the stability properties of the constant coefficient linear systems of ordinary differential equations $X' = A\,X$ and $X' = B\,X$ does not allow you to determine the stability of the system $X' = (A + B)\,X$.

Turing encountered this phenomenon in the context of reaction diffusion equations. He had a chemical reaction whose linearized behavior $u_t = A\,u$ at an equilibrium was stable. He added a stable but not scalar diffusion

$$u_t(t, x) = \mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d) u_{xx} + Au, \qquad \nu_j > 0,$$

and found instability for the sum of the two stable processes. His classic paper on morphogenisis in which this plays a central role is [**?**].

Turing's Instability.

The example is just as surprising viewed the other way. The sum of the two unstable dynamics $\tilde{A} + \tilde{B}$ and $-\tilde{B}$ is stable. The sum of two unstables can be stable.
Also for the original A, B the matrix $A + B$ has an unstable manifold with exponential growth and that instability is stabilized by adding the neutrally stable $-B$. This is called dispersive stabilization.
If one has additional information about the matrices A and B then sometimes one can predict the stability of the sum dynamics. Two such situations are described in the next exercise.

Exercise.

Prove that if A and B have eigenvalues with strictly negative real parts then the same is true of $A + B$ in each of the following two cases:

1. A and B are both symmetric (hermitian symmetric in the complex case), or,
2. A and B commute. In this case prove that $e^{(A+B)\,t} = e^{A\,t}\, e^{B\,t}$.

Turing's Instability.

The example is just as surprising viewed the other way. The sum of the two unstable dynamics $\tilde{A} + \tilde{B}$ and $-\tilde{B}$ is stable. The sum of two unstables can be stable.
Also for the original A, B the matrix $A + B$ has an unstable manifold with exponential growth and that instability is stabilized by adding the neutrally stable $-B$. This is called dispersive stabilization.
If one has additional information about the matrices A and B then sometimes one can predict the stability of the sum dynamics. Two such situations are described in the next exercise.

Exercise.

Prove that if A and B have eigenvalues with strictly negative real parts then the same is true of $A + B$ in each of the following two cases:

1. A and B are both symmetric (hermitian symmetric in the complex case), or,
2. A and B commute. In this case prove that $e^{(A+B)\,t} = e^{A\,t}\, e^{B\,t}$.

Turing's Instability.

The example is just as surprising viewed the other way. The sum of the two unstable dynamics $\tilde{A} + \tilde{B}$ and $-\tilde{B}$ is stable. The sum of two unstables can be stable.
Also for the original A, B the matrix $A + B$ has an unstable manifold with exponential growth and that instability is stabilized by adding the neutrally stable $-B$. This is called dispersive stabilization.
If one has additional information about the matrices A and B then sometimes one can predict the stability of the sum dynamics. Two such situations are described in the next exercise.

Exercise.

Prove that if A and B have eigenvalues with strictly negative real parts then the same is true of $A + B$ in each of the following two cases:

1. A and B are both symmetric (hermitian symmetric in the complex case), or,
2. A and B commute. In this case prove that $e^{(A+B)\,t} = e^{A\,t}\, e^{B\,t}$.