

Matematica e Statistica I

Anno Accademico 2009-2010

Foglio di esercizi – settimana 3

Funzione esponenziale e logaritmo

ESERCIZIO 3.1 La popolazione di batteri in una data coltura cresce secondo la legge

$$N(t) = N_0 e^{kt} \quad \text{con } k > 0$$

Se all'inizio il numero di batteri è 2000 e dopo 3 anni è raddoppiato, calcolare

- (a) il numero di batteri dopo un anno;
- (b) dopo quanti anni il numero di batteri è 48.000.

DOMANDA 3. 2 Uno studioso ha stimato che la popolazione mondiale di tonni decresce (sotto l'influsso della pesca) circa del 5% annuo. Supponendo che tale decrescita rimanga costante e che la popolazione attuale sia di circa 500.000 tonni, dopo quanti anni rimarranno al mondo solo 100.000 tonni?

- (A) 16 (B) circa 20 (C) $\sqrt[5]{400,000}$ (D) $\frac{\ln 0.2}{\ln 0.95}$

ESERCIZIO 3.3 Il radio decresce secondo la legge

$$R(t) = R_0 e^{-kt} \quad \text{con } k > 0$$

Se il periodo di dimezzamento è di 1620 anni, quale percentuale del radio presente all'inizio sarà ancora presente dopo 100 anni?

DOMANDA 3. 4 Una colonia di muffe in laboratorio raddoppia in peso ogni 9 ore. Se il peso iniziale era 1g, quale sarà il peso in grammi dopo 1 giorno?

- (A) $\log_2 9$ (B) $2^{8/3}$ (C) 3,667 (D) $\sqrt[9]{2}$

ESERCIZIO 3.5 Gli isotopi radioattivi X_{97} decadono secondo una legge esponenziale con tempo di dimezzamento 20 anni. Dopo quanti anni la quantità di isotopi si sarà ridotta al 10% della quantità iniziale?

ESERCIZIO 3.6 Sappiamo che il Carbonio-14 ha un tempo di dimezzamento pari a circa 5.730 anni, mentre gli altri isotopi del carbonio sono stabili. Sappiamo inoltre che la percentuale di Carbonio-14 sul carbonio totale in atmosfera e negli organismi viventi è circa 10^{-12} .

Supponiamo di trovare un fossile in cui la percentuale di Carbonio-14 sul carbonio totale è circa $1,2 \cdot 10^{-13}$. Qual è l'età del fossile?

[Questo è il metodo di datazione del Carbonio-14; l'ipotesi è che, dopo la morte, un organismo non scambia carbonio con l'atmosfera, per cui quello 14 decade, mentre il resto rimane stabile.]

ESERCIZIO 3.7 Una femmina di tarma (*Tinea pellionella*) depone circa 150 uova. In un anno si possono avere fino a 5 generazioni di tarme. Ogni larva mangia circa 20 mg di lana. Assumendo che $2/3$ delle uova non si schiudano e che il 50% delle tarme rimanenti sia femmina, stimare la quantità di lana che potrebbe essere consumata dai discendenti di una femmina nel corso di un anno. (La prima femmina appartiene alla prima generazione.)

ESERCIZIO 3.8 Trovare l'incremento $\Delta y = f(x+1) - f(x)$ per la funzione esponenziale $y = f(x) = aq^x$ e mostrare che l'incremento è anch'esso esponenziale.

ESERCIZIO 3.9 La popolazione mondiale nel 1970 era di circa 3.7×10^9 individui. Il tasso di crescita era approssimativamente del 2% annuo. Supponendo che il tasso di crescita fosse costante, stimare la popolazione mondiale negli anni 1980, 1990 e 2000. Confrontate la previsione data da questo modello con i numeri effettivamente osservati.

ESERCIZIO 3.10 Un bambino era alto 112 cm al suo tredicesimo compleanno, mentre al quattordicesimo era 121 cm. Assumendo una crescita mensile geometrica, determinare il tasso (mensile) di tale crescita.

DOMANDA 3.11 Quale grafico in Figura 1 rappresenta la funzione $f(x) = 2^{x+2}$?

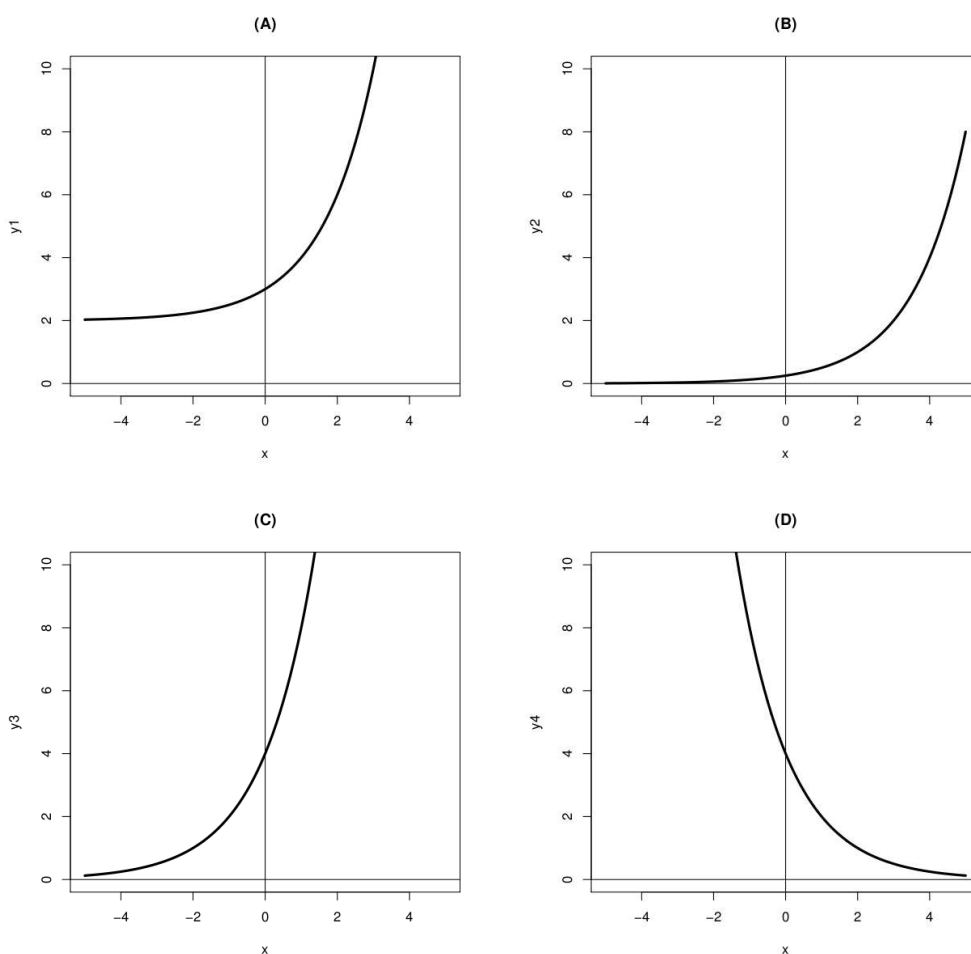


Figura 1: Grafici delle funzioni della domanda 3.11.

DOMANDA 3.12 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (A) $\exists a$ t.c. $2^a = 0$
- (B) $\exists a$ t.c. $2^a = -4$
- (C) $\exists a$ t.c. $-2^{-a} = 8$
- (D) $\exists a$ t.c. $2^{-a} = \sqrt{5}$

DOMANDA 3.13 Supponiamo che una popolazione di individui decresca con un tasso annuo costante del 10%. Determinare quale dei grafici in Figura 2 rappresenta l'andamento di tale popolazione nel corso di un decennio.

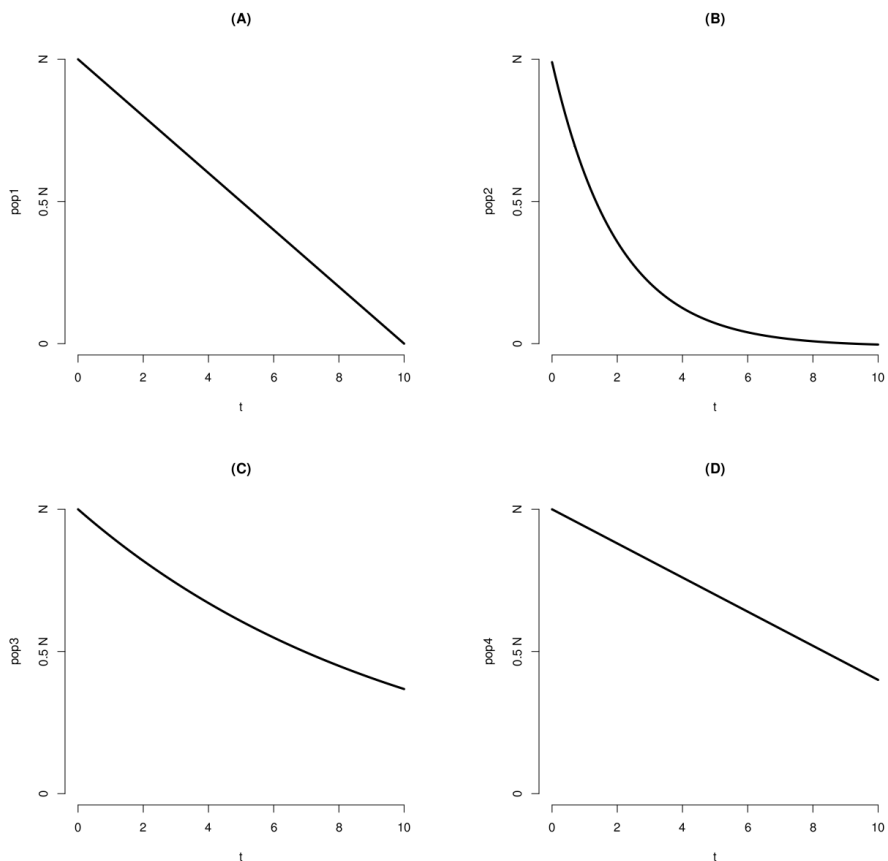


Figura 2: Grafici dell'andamento della popolazione della domanda 3.19.

DOMANDA 3.14 Indicare quali delle seguenti uguaglianze sono corrette:

- (A) $\log_4 8 = 2$
- (B) $\log_9 \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- (C) $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
- (D) $\log_{10} 0.1 = -1$

ESERCIZIO 3.15 Sapendo che $\log_{10} 32 = \alpha$, determinare il valore di $\log_{10} 320000$.

ESERCIZIO 3.16 Determinare l'insieme dei valori di x per cui $3^x > x$ è soddisfatta.

DOMANDA 3.17 In Figura 3 è rappresentato il grafico di $f(x) = ce^{ax}$, con $a, c \in \mathbb{R}$. Stabilire allora quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- (A) $a > 0$ e $c = 4$
- (B) $a < 0$ e $c = 4$
- (C) $a > 0$ e $c = -4$
- (D) $a < 0$ e $c = -4$

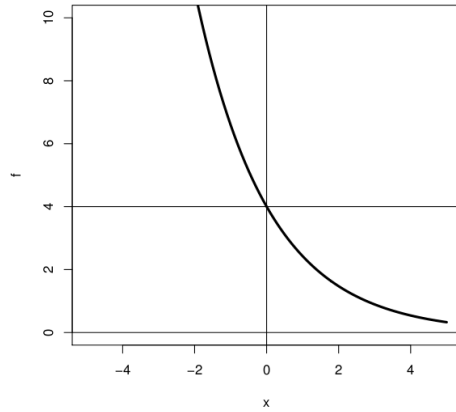


Figura 3: Grafici della funzione f della domanda 3.13.

DOMANDA 3.18 Sapendo che $\log_3 \alpha = \frac{19}{4}$, quale delle seguenti stime è vera?

- (A) $81 < \alpha < 100$
- (B) $100 < \alpha < 160$
- (C) $160 < \alpha < 343$

ESERCIZIO 3.19 La banca A dà un interesse annuo del 4% sui capitali investiti, mentre la banca B dà un interesse semestrale del 2% sui capitali investiti. In quale banca conviene investire?