

Biomatematica 1 A.A. 2008/09

Esercizio assegnato il 25/2/09

Consideriamo una popolazione che cresca naturalmente secondo una dinamica logistica.

Supponiamo che si eserciti uno sforzo E di pesca¹ e che il pescato nell'unità di tempo sia pari a qEx , dove x rappresenta la numerosità della popolazione e q è un coefficiente di 'pescabilità'.

1. Scrivete l'equazione differenziale per $x(t)$ che traduce questa ipotesi, e analizzate gli equilibri ed il comportamento asintotico, a seconda del valore dei parametri.
2. Supponiamo che il guadagno sia proporzionale (tramite il prezzo p) al pescato, e il costo (tramite un coefficiente c) allo sforzo E . Supponiamo che un dittatore illuminato voglia regolare lo sforzo E al valore che massimizza il profitto (= guadagno - costo) quando la popolazione è all'equilibrio asintoticamente stabile. Trovare il valore di E ed il corrispondente valore di equilibrio di x .
3. La teoria economica prevede che, se la pesca è ad accesso libero, lo sforzo E a lungo termine raggiunga il livello a cui il profitto è uguale a 0. Trovare il valore di E ed il corrispondente valore di equilibrio di x ; confrontarli (cioè trovare se sono maggiori, minori o non si può dire) con il caso precedente.
4. Supponiamo che il governo metta una tassa pari ad una frazione ρ dei profitti conseguiti nella pesca. Come si modifica il risultato della pesca ad accesso libero?
5. Supponiamo che il governo metta una tassa sul pescato Y . Consideriamo due casi: una percentuale costante uguale a ρY , ovvero una tassa $\tau(Y)$ progressiva data dalla formula

$$\tau(Y) = \begin{cases} 0 & \text{se } Y \leq Y_0 \\ \rho(Y - Y_0) & \text{se } Y > Y_0 \end{cases}$$

Qual è il risultato di tale regolazione sulla pesca ad accesso libero?

6. Supponiamo che la dinamica di x sia descritta, in assenza di pesca, dalla logistica generalizzata

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K} \right)^\alpha \right). \quad \alpha > 0$$

Come si modificano i risultati precedenti?

¹o caccia, raccolta, ..., a seconda del tipo di organismi