

Biomatematica 1 A.A. 2008/09

Esercizi assegnati il 9/3/09¹

1. Un fenomeno spesso osservato è che negli stagni dove sono stati immessi dei pesci l'acqua ha un colore verdastro, indice di elevata biomassa algale. Si cerchi di spiegare tale fenomeno tramite un sistema preda-predatore con risposta funzionale e numerica tipo Holling, in cui le alghe (preda) seguano una crescita logistica in assenza di predatore, e lo zooplancton (predatori) abbia un tasso di mortalità uguale a $d + bP$ dove P è la densità di pesci (supposta costante). Trovare come varia la biomassa algale all'equilibrio con la densità di pesci, e commentare i risultati.
2. In tutto il Canada gli alci vengono predati da branchi di lupi che infliggono loro una mortalità rilevante. L'ecologo Messier (1994) ha raccolto dati in varie zone del paese e ha rilevato che vale approssimativamente la seguente relazione fra la densità L (# di lupi per km²) di lupi e la densità A (# di alci per km²) di alci:

$$L = \frac{0.0587(A - 0.03)}{0.76 + A}.$$

Interpretiamo questa relazione come l'isoclina dei predatori, ossia il numero di lupi all'equilibrio fissata una densità costante A di alci. E' possibile avere tale isoclina da un sistema preda-predatore del tipo Gause-Rosenzweig-McArthur?

Messier ha anche valutato che, in assenza di lupi, la crescita delle alci è logistica con tasso intrinseco di crescita pari a 0.51 anni^{-1} e capacità portante pari a 1.96 alci per km² e che il tasso di mortalità per predazione (misurato in anni^{-1}) è proporzionale alla densità dei lupi e pari a $5.2L$.

Tracciare le isocline della preda e del predatore e trovare lo stato di equilibrio positivo del sistema. E' stabile tale equilibrio²?

3. Leslie (1948) propose il seguente sistema come modello per la dinamica preda-predatore:

$$\frac{dH}{dt} = H(a - bH - cP), \quad \frac{dP}{dt} = v\left(r - s\frac{P}{H}\right),$$

in altri termini i predatori (P) seguono una dinamica di tipo logistico con capacità portante proporzionale alla densità di prede (H).

Enunciare chiaramente, ed eventualmente criticare, le ipotesi del modello.

Tracciare le isocline nel piano delle fasi, individuando i punti di equilibrio.

Mostrare che la seguente funzione (dove (H^*, P^*) è l'equilibrio positivo)

$$V(H, P) = \log\left(\frac{H}{H^*}\right) + \frac{H^*}{H} + \frac{cH^*}{s} \left(\log\left(\frac{P}{P^*}\right) + \frac{P^*}{P} \right)$$

è una funzione di Liapunov per il sistema.

¹Vari di loro sono stati tratti o adattati dal libro "101 problemi di ecologia" di R. Casagrandi, G. De Leo e M. Gatto, McGraw-Hill, 2002

²riflettere sulla relazione fra l'isoclina e l'equazione differenziale per i predatori