

Biomatematica 1 A.A. 2008/09

Esercizi assegnati il 20/3/09

1. Considerate il sistema con 2 prede (H_1 e H_2) e 1 predatore ed interazioni di tipo Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}H_1' &= r_1 H_1 \left(1 - \frac{H_1}{K_1} - \alpha_{12} \frac{H_2}{K_1}\right) - c_1 H_1 P \\H_2' &= r_2 H_2 \left(1 - \alpha_{21} \frac{H_1}{K_2} - \frac{H_2}{K_2}\right) - c_2 H_2 P \\P' &= \gamma_1 c_1 H_1 P + \gamma_2 c_2 H_2 P - dP\end{aligned}$$

- (a) Rendete le equazioni non-dimensionali, tramite opportune ridefinizioni delle variabili.
- (b) Elencate i possibili equilibri con 1 o 2 specie presenri, ed esaminate le condizioni per la loro esistenza e stabilità. Per quanto riguarda equilibri positivi, trovate le condizioni che esso deve soddisfare, senza discutere se esista (nel quadrante positivo) e se sia stabile.
- (c) Trovate valori dei parametri (anche con l'aiuto di un calcolatore), e mostrate qualche simulazione corrispondente, tali che:
- senza predatore le prede non coesistono, ma coesistono con il predatore¹;
 - senza predatore le prede coesistono, ma l'introduzione del predatore causa l'estinzione di una di esse;
 - le 2 prede ed il predatore coesistono su un ciclo limite (es.: $r_1 = 16$, $r_2 = 8$, $d = 5/6$, $K_1 = 2$, $K_2 = 16$, $\alpha_{12} = 1/2$, $\alpha_{21} = 3.5$, $c_1 = c_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/3$).
 - Esiste un equilibrio interno (di coesistenza) stabile, ma anche un equilibrio stabile sul bordo (di estinzione di una delle specie) (es.: $r_1 = 16$, $r_2 = 8$, $d = 5/6$, $K_1 = 2$, $K_2 = 16$, $\alpha_{12} = 1/2$, $\alpha_{21} = 4.04$, $c_1 = c_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$).

2. Considerate l'equazione a tempo discreto di Ricker

$$x_{n+1} = x_n \varphi(x_n), \quad \text{dove } \varphi(x) = a e^{-x}.$$

Trovate gli equilibri (nonnegativi) del sistema, e per quali valori del parametro a essi sono asintoticamente stabili, distinguendo i due casi in cui la convergenza all'equilibrio è monotona oppure oscillatoria.

¹notare che il concetto di 'coesistono' non è precisato