Consideriamo una famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \tag{1}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e f è sufficientemente regolare (da definirsi in seguito).

Senza voler affrontare in generale il problema della biforcazione su cui esistono libri eccellenti[1], vorrei solo presentare una formulazione precisa dei risultati più semplici nella biforcazione di equilibri, limitandomi ai casi più comuni (si considereranno quindi le biforcazioni dette di codimensione 1[2] o che compaiono in sistemi speciali (ad esempio quelli considerati in dinamica di popolazione).

Il teorema di Hartman-Grobman assicura che vicino a un equilibrio iperbolico un sistema è localmente equivalente al sistema linearizzato. Inoltre tutti i sistemi lineari iperbolici (cioè senza autovalori con parte reale nulla) con lo stesso numero di autovalori a parte reale positiva (e quindi anche a parte reale negativa) sono equivalenti. Da ciò si vede che, se un sistema ha un punto di equilibrio iperbolico, il suo comportamento qualitativo non può variare per piccole variazioni localizzate del sistema[3].

Biforcazioni locali dall'equilibrio si avranno quindi in corrispondenza di punti di equilibrio non iperbolici, ossia con autovalori dello Jacobiano con parte reale nulla. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che l'equilibrio in questione sia 0 ed anche il valore critico del parametro $\alpha_0 = 0$.

I casi di interesse saranno quindi

- $D_x f(0, 0)$ ha 0 come autovalore;
- $D_x f(0, 0)$ ha autovalori $\pm i\omega_0$ con $\omega_0 \neq 0$.

In entrambi i casi supporremo che l'autovalore in questione sia semplice e tutti gli altri autovalori abbiano parte reale diversa da 0.

La biforcazione "generica" nel caso in cui 0 sia autovalore è la biforcazione tangente; considereremo però anche la biforcazione transcritica e tangente che sono "generiche" per certe classi di sistemi. Nel caso in cui vi siano due autovalori (complessi coniugati) immaginari puri ha in genere luogo la biforcazione di Hopf.

1 La biforcazione tangente

Come detto sopra, supporremmo che $f(0, 0) = 0$ e $L := f_x(0, 0)$ abbia 0 come autovalore, dove f è una funzione sufficientemente regolare (C^2 in questo caso) definita in un intorno di $(0, 0)$.

Vale il seguente

Teorema 1 *Sia $Lv_0 = 0$ e $L^t\Phi_0 = 0$ con $(\Phi_0, v_0) = 1$[4], ossia v_0 e Φ_0 siano autovttori di L e L^t corrispondenti all'autovalore 0. Suppponiamo poi che L*

[1] segnalo in particolare Y.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer Verlag 1998, più elementare e computazionale; e S. Wiggins, *Introduction to applied non-linear dynamical systems and chaos,* Springer Verlag 1990, che fornisce un migliore inquadramento del tema nella teoris dei sistemi dinamici.

[2] vedere i libri citati per una spiegazione del termine

[3] possono però avvenire biforcazioni globali, che dipendono cioè da variazioni del sistema non solo in un intorno dell'equilibrio

[4] questo è sempre possibile come mostrato negli appunti di algebra lineare

abbia k autovalori (contati con la loro molteplicità) con parte reale negativa, e $n-k-1$ con parte reale positiva.

Sia

H1) $(\Phi_0, f_\alpha(0,0)) \neq 0$.

Allora esistono

$$x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \quad e \quad \alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$$

con $x(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$ tali che $f(x(s), \alpha(s)) \equiv 0$.

A parole, $x(s)$ è un equilibrio per il sistema (1) quando il parametro è uguale a $\alpha(s)$. Inoltre vale

$$\alpha'(0) = 0, \qquad \alpha''(0) = -\frac{(\Phi_0, f_{xx}(0,0)[v_0, v_0])}{(\Phi_0, f_\alpha(0,0))} \qquad x'(0) = v_0.$$

Se

H2) $(\Phi_0, f_{xx}(0,0)[v_0, v_0]) \neq 0$

la funzione $\alpha(s) = \sigma s^2 + O(s^3)$ con $\sigma \neq 0$ e quindi esistono 2 equilibri per $\alpha > 0$ e nessuno per $\alpha < 0$, o viceversa. Dei 2 equilibri, uno ha varietà stabile di dimensione k (e varietà instabile du dimensione $n-k$), l'altro ha varietà stabile di dimensione $k+1$ (e varietà instabile du dimensione $n-k-1$); in particolare, se $k = n-1$ (ossia se tutti gli autovalori di L, a parte 0, hanno parte reale negativa), uno dei due è stabile, l'altro è instabile.

Usando la nozione di equivalenza topologica, si può dire che, sotto le ipotesi $H1) - H2)$, il sistema (1) è topologicamente equivalente a

$$\begin{cases} u' &= \beta - u^2, & u \in \mathbb{R} \\ \\ v' &= v, & v \in \mathbb{R}^{n-k-1} \\ w' &= -w, & w \in \mathbb{R}^k \end{cases}$$

in un intorno di $(0,0)$.

2 La biforcazione transcritica

Le condizioni H1)-H2) sono "generiche" nel senso (che può essere reso matematicamente preciso) che "quasi tutti" i sistemi le soddisfano; ciò è abbastanza intuitivo perché le quantità che compaiono nellecondizioni possono *a priori* avere un valore arbitrario, ed è quindi estremamente improbabile che siano uguali a 0. Nello spirito della teoria della biforcazione (e di come viene svolta in genere l'analisi dei modelli in biomatematica) potremmo trascurare l'analisi dei casi non generici.

In molti modelli in dinamica delle popolazioni è però usuale che un certo stato sia di equilibrio per tutti i valori dei parametri. In particolare, poiché si suppone che non ci sia la generazione spontanea e in molti modelli neanche l'immigrazione, lo stato con popolazione 0 sarà di equilibrio per tutti i valori dei parametri; analogamente, per modelli a più specie, gli stati in cui una o più abbiano popolazione 0. Denotando lo stato di equilibrio come 0, viene perciò naturale fare l'ipotesi: $f(0, \alpha) \equiv 0$.

Supponiamo poi, come nel caso precedente, che $L = f_x(0,0)$ abbia 0 come autovalore. Ponendo $L(\alpha) = f_x(0, \alpha)$, supponiamo, più precisamente,

H1') $f(0,\alpha) \equiv 0$. $L(\alpha)$ ha un autovalore (semplice) $\sigma(\alpha)$ tale che $\sigma(0) = 0$ e $\sigma'(0) \neq 0$. Inoltre $f_x(0,0)$ ha k autovalori con parte reale negativa e $n-k-1$ con parte reale positiva.

Come nel caso precedente, siano v_0 e Φ_0 autovettori corrispondenti all'autovalore 0 di L e L^t (ossia $Lv_0 = 0$ e $L^t\Phi_0 = 0$) con $(\Phi_0, v_0) = 1$.

Si può mostrare che l'ipotesi $\sigma'(0) \neq 0$ è equivalente a $(\Phi_0, L'(0)v_0) \neq 0$. Vale il seguente

Teorema 2 *Valgano (H1') e*

H2) $(\Phi_0, f_{xx}(0,0)[v_0, v_0]) \neq 0$.

Allora esistono

$$x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \quad e \quad \alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$$

con $x(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$ *tali che* $f(x(s), \alpha(s)) \equiv 0$.

Inoltre vale

$$\alpha'(0) = -\frac{1}{2}\frac{(\Phi_0, f_{xx}(0,0)[v_0, v_0])}{(\Phi_0, L'(0)v_0)} \qquad x'(0) = v_0.$$

$x(s)$ *è un equilbrio di (1) quando il parametro è uguale a* $\alpha(s)$. *Se* $\alpha(s)\sigma'(0) > 0$ *esso ha varietà stabile di dimensione* $k+1$ *(e varietà instabile du dimensione* $n-k-1$*); se* $\alpha(s)\sigma'(0) < 0$ *esso ha varietà stabile di dimensione* k *(e varietà instabile du dimensione* $n-k$*); in particolare, se* $k = n-1$ *(ossia se tutti gli autovalori di* L*, a parte* 0*, hanno parte reale negativa), è stabile per* $\alpha(s)\sigma'(0) > 0$*, instabile per* $\alpha(s)\sigma'(0) < 0$.

Commenti: per l'ipotesi (H2), $\alpha'(0) \neq 0$, quindi, eventualmente restringendo l'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, la funzione $\alpha(\cdot)$ è strettamente monotona e quindi, per ogni α sufficientemente vicino a 0, esiste un unica $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tale che $\alpha(s) = \alpha$; di conseguenza, per ogni tale α esiste, oltre all'equilibrio 0, un unico (in un intorno di 0) equilibrio $x(s) \neq 0$ (infatti $x'(0) = v_0 \neq 0$).

Tale equilibrio avrà proprietà di stabilità complementari a quelle dell'equilibrio 0. Supponendo infatti, per fissare le idee, $\sigma'(0) > 0$, un autovalore di $L(\alpha)$ passa da negativo a positivo quando $\alpha = 0$; di conseguenza 0 avrà varietà stabile di dimensione $k+1$ per $\alpha < 0$ e di dimensione k per $\alpha > 0$; come si è detto sopra, l'equilibrio $x(s)$ ha esattamente la proprietà opposta. Nel caso in cui $k = n-1$, possiamo dire che i due equilibri 0 e $x(s)$ collidono in $\alpha = 0$ e si scambiano la stabilità.

Nel caso di problemi biologici, molto spesso hanno senso soltanto le soluzioni nonnegative (e quindi anche gli equilibri). Se v_0 è un vettore con tutte le componenti nonnegative[5], $x(s)$ fornirà un equilibrio sensato solo per $s > 0$; ciò corrisponde ad $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$, a seconda del segno di $\alpha'(0)$. Si suole quindi distinguere fra una biforcazione supercritica nella quale l'equilibrio $x(s)$ è nonnegativo per i valori dei parametri in cui l'equilibrio 0 ha perso stabilità (ciò si avrà se $\alpha'(0)\sigma'(0) > 0$), e biforcazione subcritica nella quale l'equilibrio $x(s)$ è nonnegativo per i valori dei parametri in cui l'equilibrio 0 ha guadagnato stabilità (ciò si avrà se $\alpha'(0)\sigma'(0) < 0$). Limitandosi per chiarezza al caso $k = n-1$ e $\sigma'(0) > 0$, nel caso di biforcazione supercritica abbiamo che l'equilibrio 0 da

[5]questo succede spesso nelle applicazioni biologiche

stabile diventa instabile quando α passa da negativo a positivo; corrispondentemente, nasce da 0 un equilibrio positivo stabile per $\alpha > 0$; nel caso di biforcazione subcritica, invece l'equilibrio positivo nasce da 0 instabile per $\alpha < 0$. Ripeto che questa differenziazione è dovuta soltanto al fatto che interpretiamo in modo diverso le soluzioni nonnegative da quelle negative; dal punto di vista strettamente matematico, non c'è differenza fra i due casi[6].

3 Il teorema di biforcazione di Hopf

Come sopra, consideriamo una famiglia di equazioni differenziali $\dot{x} = f(x, \alpha)$. Supporremo $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e f sufficientemente regolare (almeno C^4 rispetto a x e C^2 rispetto ad α). E' sufficiente che la funzione f sia definita in un aperto, perché tutte le considerazioni successive sono locali.

La biforcazione di Hopf (attribuibile più correttamente a Poincaré e Andronov, oltre a Hopf) si ha quando, per un certo valore del parametro α_0, un punto di equilibrio è non iperbolico con due autovalori dello Jacobiano immaginari puri e tutti gli altri (se $n > 2$) con parte reale diversa da 0. Sono necessarie inoltre due condizioni, dette di trasversalità e di non-degenerazione.

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che l'equilibrio in questione sia 0 ed anche il valore critico del parametro $\alpha_0 = 0$. Enunciamo allora il teorema di biforcazione di Hopf, prima per $n = 2$ (più semplice), poi per $n > 2$ (piccole modifiche).

Teorema 3 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sufficientemente regolare tale che $f(0,0) = 0$ e $D_x f(0,0)$ ha autovalori (necessariamente semplici) $\pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$.*

Allora esiste una funzione $\bar{x}(\alpha)$ definita in un intorno di 0 tale che $\bar{x}(0) = 0$ e $f(\bar{x}(\alpha), \alpha) = 0$, ossia $\bar{x}(\alpha)$ è un equilibrio di (1); inoltre, non esistono altri equilibri in un intorno di 0.

Per continuità, per $|\alpha|$ piccolo, la matrice $A(\alpha) = D_x f(x, \alpha)|_{x=\bar{x}(\alpha)}$ ha autovalori complessi coniugati $\lambda(a)$ e $\bar{\lambda}(\alpha)$ tali che $\lambda(a) = \sigma(a) + i\omega(a)$, dove s e ω sono funzioni C^2 tali che $\sigma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0$.

Supponiamo allora $\sigma'(0) \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, dove a_0 è un numero (detto il primo coefficiente di Liapunov) che può essere calcolato a partire da $f(x, 0)$ (vedi ad es. la formula (5.62) nel libro di Kuznetsov, op. cit.).

Per $|\alpha|$ sufficientemente piccolo con $\alpha\sigma'(0)a_0 < 0$, esiste allora una famiglia di orbite periodiche Γ_a di (1). Tali orbite sono asintoticamente stabili se $a_0 < 0$ e instabili se $a_0 > 0$. Inoltre non esistono altre orbite periodiche in un intorno di $x = 0$ e $\alpha = 0$. Il raggio di tali orbite è in prima approssimazione dato da $\sqrt{-\dfrac{\alpha\sigma'(0)}{a_0}}$ e il loro periodo da $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Usando la nozione di equivalenza topologica, possiamo dire che, sotto le ipotesi precedenti, la famiglia di equazioni differenziali (1) è topologicamente equivalente a

$$y' = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} y + sgn(a_0)|y|^2 y$$

in un intorno di $(0,0)$.

[6] e infatti essi non vengono distinti nei testi sui sistemi dinamici

Se $a_0 < 0$, le orbite periodiche esistono (e sono asintoticamente stabili) per $\beta > 0$, quando l'equilibrio 0 è instabile; invece, non vi sono orbite periodiche per $\beta > 0$, quando 0 è asintoticamente stabile. Analogamente si ha per il sistema equivalente (1). Questo caso è detto quello di biforcazione di Hopf *supercritica*.

Invece, se $a_0 > 0$, le orbite periodiche esistono (e sono instabili) per $\beta < 0$, quando l'equilibrio 0 è asintoticamente stabile; invece, non vi sono orbite periodiche per $\beta > 0$, quando 0 è instabile. Analogamente si ha per il sistema equivalente (1). Questo caso è detto quello di biforcazione di Hopf *subcritica*.

In $\mathbb{R}^n$, il risultato è pressoché uguale, richiedendo che tutti gli altri autovalori abbiano parte reale diversa da 0. Inoltre non si potrà affermare che l'equilibrio e l'orbita periodica sia asintoticamente stabile, perché ciò dipenderà dagli altri autovalori di $D_x f(0,0)$.

Teorema 4 *Sia $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sufficientemente regolare tale che $f(0,0) = 0$ e $D_x f(0,0)$ ha autovalori semplici $\pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ e tutti gli altri autovalori λ soddisfano $\Re\lambda \neq 0$; sia n_+ il numero di autovalori (contati con la loro molteplicità) tali che $\Re\lambda > 0$ e n_- il numero di autovalori (contati con la loro molteplicità) tali che $\Re\lambda < 0$ (ovviamente $n_+ + n_- = n - 2$).*

Consideriamo, per $|\alpha|$ piccolo, la matrice $A(\alpha) = D_x f(x,\alpha)|_{x=\bar{x}(\alpha)}$ dove $\bar{x}(\alpha)$ è la curva di equilibri di (1). avrà una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda(a)$ e $\bar{\lambda}(\alpha)$ tali che $\lambda(a) = \sigma(a) + i\omega(a)$, dove s e ω sono funzioni C^2 tali che $\sigma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0$. Tutti gli altri autovalori avranno $\Re\lambda \neq 0$.

Supponiamo allora $\sigma'(0) \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, dove a_0 è il primo coefficiente di Liapunov (vedi sempre la formula (5.62) nel libro di Kuznetsov, op. cit.).

Per $|\alpha|$ sufficientemente piccolo con $\alpha\sigma'(0)a_0 < 0$, esiste allora una famiglia di orbite periodiche Γ_a di (1). Non esistono altre orbite periodiche in un intorno di $x = 0$ e $\alpha = 0$. Inoltre, se $a_0 < 0$ la varietà stabile delle orbite avrà dimensione $n_- + 2$ e quella instabile n_+; invece, se $a_0 > 0$, la varietà stabile delle orbite avrà dimensione n_- e quella instabile $n_+ + 2$.

L'insieme (Γ_a, α) al variare di α è una superficie in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tangente in $(0,0)$ al piano individuato dagli autovettori di $A(0)$ relativi $a +$ e $-i\omega$.

Infine, la famiglia di equazioni differenziali (1) è topologicamente equivalente a

$$\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} y + sgn(a_0)|y|^2 y, & y \in \mathbb{R}^2 \\ v' = v, & v \in \mathbb{R}^{n+} \\ w' = -w, & w \in \mathbb{R}^{n-} \end{cases}$$

in un intorno di $(0,0)$.