MATRICI DI LESLIE

Consideriamo una popolazione che si riproduce a tempi ~~ad età~~ discrete, chiamati $K = 0, 1, 2, \ldots$

Facendo un censimento subito prima della riproduzione, gli individui potranno avere età 1 (essendo nati al tempo della precedente riproduzione), 2, ... Supponiamo che esista un'età massima n.

Allora possiamo definire un vettore di popolazione

u_j^K = numero di individui di età j al tempo K, $K \in \mathbb{N}$, $j = 1 \ldots n$.

Sia s_j^K la proporzione degli individui di età j al tempo K che sopravvivono fino al tempo $K+1$.

Ovviamente
$$u_{j+1}^{K+1} = s_j^K u_j^K \qquad (1) \qquad , j = 1 \ldots n-1$$

Sia ora b_j^K il numero medio di figli generato da una madre di età j al tempo K che sopravvivono fino al tempo $K+1$. Si ha
$$u_1^{K+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j^K u_j^K . \qquad (2)$$

(1) e (2) permettono evidentemente di calcolare il vettore u^{K+1} da u^K e quindi ricorsivamente si può avere la soluzione a ogni tempo, noto u^0.

È utile riassumere (1) e (2) in forma matriciale.

Costruiamo la matrice
$$M^K = \begin{pmatrix} b_1^K & \cdots & b_n^K \\ s_1^K & & 0 \\ 0 & \ddots & s_{n-1}^K \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{lll} m_{1,j}^K = b_j^K & j = 1 \ldots n & \\ m_{j,j-1}^K = s_j^K & j = 2 \ldots n & (3) \\ m_{i,j}^K = 0 & \text{se } j \neq i-1 \text{ e } i \neq 1 & \end{array}$$

Si ha
$$u^{K+1} = M^K u^K \qquad (4)$$

e quindi
$$u^K = M^{K-1} \cdots M^0 u^0 . \qquad (5)$$

Supponiamo ora che $b_j^k \equiv b_j$ e $s_j^k \equiv s_j$, ossia ~~che~~ le fertilità e mortalità siano indipendenti dal tempo. Posto

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & s_{n-1} & \end{pmatrix}$$ si ha da (5)

$$u^k = M^k u^0 \qquad (6)$$

Per studiare le potenze M^k è necessario studiare lo spettro di M. ~~Questo~~ Si potrebbe ~~fare~~ applicare la teoria di Perron-Frobenius, ma M è così semplice che lo faremo direttamente.

Supponiamo $b_n \neq 0$. Se fosse $b_n = 0$, ci si potrebbe ridurre a questo caso, come vedremo dopo.

Si ha $|M| = s_1 \cdots s_{n-1} b_n > 0$

quindi 0 non è un autovalore di M.

Sia ora $\lambda \neq 0$ un autovalore di M e v un autovettore corrispondente.

Applicando $Mv = \lambda v$, otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} b_j v_j = \lambda v_1 \qquad (7)$$

e

$$s_j v_j = \lambda v_{j+1}, \quad j = 1 \ldots n-1. \qquad (8)$$

Ponendo

$$p_j = s_1 \cdots s_j \qquad j = 1 \ldots n-1 \qquad (9)$$

e applicando (8) ripetutamente otteniamo

$$v_j = p_{j-1} \lambda^{-(j-1)} v_1, \quad j = 2 \ldots n. \qquad (10)$$

Sostituendo (10) in (7) abbiamo (posto $p_0 = 1$)

$$\sum_{j=1}^{n} b_j p_{j-1} \lambda^{-(j-1)} v_1 = \lambda v_1. \qquad (11)$$

Se fosse $v_1 = 0$, avremmo da (10) $v_j = 0 \ \forall j$ e quindi $v = 0$. ~~Allora~~

Quindi $v_1 \neq 0$ e possiamo dividere (11) per λv_1 ottenendo

$$H(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j P_{j-1} \lambda^{-j} = 1. \qquad (12)$$

In conclusione ogni autovalore λ di M soddisfa $H(\lambda) = 1$.

Moltiplicando (12) per λ^n e cambiando segno otteniamo

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n - \sum_{j=1}^{n} b_j P_{j-1} \lambda^{n-j} = 0 \qquad (13)$$

Poiché $f(\lambda)$ è un polinomio di grado n, è (a meno di un fattore $(-1)^n$) il polinomio caratteristico di M, che avremmo potuto ottenere calcolando $|M - \lambda I|$.

Per ora conviene continuare a considerare $H(\lambda)$. Studiando $H(\lambda)$ su $(0, \infty)$ si vede subito

$$H'(\lambda) < 0 \qquad \lim_{\lambda \to 0^+} H(\lambda) = +\infty \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} H(\lambda) = 0 . \qquad (14)$$

Da (14) segue che esiste unico $p > 0$ tale che $H(p) = 1$.

Notiamo inoltre che posto $R \equiv H(1) = \sum_{j=1}^{n} b_j P_{j-1}$

si ha che $p > 1 \Leftrightarrow R > 1$, $p < 1 \Leftrightarrow R < 1$. Biologicamente R rappresenta il numero medio di figli attesi in tutta la vita.

Sia ora $\lambda \neq p$ radice di $H(\lambda) = 1$. Si ha

$$1 = \left| \sum_{j=1}^{n} b_j P_{j-1} \lambda^{-j} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} b_j P_{j-1} |\lambda|^{-j} = H(|\lambda|). \qquad (15)$$

Quindi $H(|\lambda|) \geq 1$ il che implica $|\lambda| \leq p$.

Per dimostrare $|\lambda| < p$, aggiungiamo un'altra ipotesi.

Sia $MCD\{ j : b_j > 0 \} = 1$.

Supponiamo $\lambda = \varrho e^{i\theta}$ $\qquad 0 < \theta < 2\pi$.

Per avere uguaglianza in (15) deve essere

$$e^{-ij\theta} = 1 \qquad \forall j \text{ tale che } b_j > 0$$

ossia $\quad j\theta = 2K\pi$ per qualche $K \in \mathbb{Z}$ per ogni j tale che $b_j > 0$.

ossia $\quad j\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ per ogni j tale che $b_j > 0$.

Ponendo $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ primi fra loro

deve essere $\quad j\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ ossia j deve essere multiplo di q.

Poiché $MCD\{j : b_j > 0\} = 1 \Longrightarrow q = 1 \Longrightarrow \frac{\theta}{2\pi} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ contro l'ipotesi $0 < \theta < 2\pi$.

In conclusione abbiamo dimostrato:

<u>Proposizione</u>. Sia $b_n > 0$, e $MCD\{j : b_j > 0\} = 1$.

Allora M ammette un unico autovalore positivo ρ.

Tutti gli altri autovalori λ soddisfano $|\lambda| < \rho$. Gli autovettori corrispondenti sono dati da (10). In particolare v^1, l'autovettore corrispondente a ρ, si può scegliere tutto positivo.

<u>Inoltre ρ è un autovalore semplice di M.</u>

Quest'ultima cosa significa che $(\lambda - \rho)$ è un fattore semplice in $f(\lambda)$.

Si vede subito che λ_0 è un autovalore semplice di una matrice se e solo se

$$f'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

Nel nostro caso $f(\lambda) = \lambda^n(1 - H(\lambda))$. Quindi

$$f'(\lambda)\big|_{\lambda=\rho} = n\rho^{n-1}(1 - H(\rho)) - \rho^n H'(\rho) = -\rho^n H'(\rho) \neq 0.$$

Usando la ~~Dalla~~ proposizione precedente, si può porre M in ~~segue che~~ forma di Jordan come ~~di M~~ segue.

Esiste una base $\{v^1, v^{2,1}, \ldots, v^{2,m_2}, \ldots, v^{s,1}, \ldots, v^{s,m_s}\}$ di $\mathbb{R}^n$

dove $m_2, \ldots, m_s$ sono le molteplicità algebriche degli autovalori $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$

in modo tale che posto $V_i = \{v^{i,1}, \ldots, v^{i,m_i}\}$ $\quad (M - \lambda_i I)^{m_i} V_i = \{0\}$.

Inoltre v^{i,m_i} sono autovettori ~~possono essere scelti~~ di M e gli altri sono scelti secondo certe regole (a seconda della molteplicità geometrica di λ_i).

Scrivendo il vettore u^0 in questa base abbiamo

$$u^0 = c_1 v^1 + \sum_{i=2}^{s} \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} v^{i,j} \qquad (16)$$

quindi

$$u^K = M^K u^0 = c_1 M^K v^1 + \sum_{i=2}^{s} M^K \Big(\sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} v^{i,j} \Big) \qquad (17)$$

Poiché v^1 è un autovettore d'autovalore p si ha

$$M^K v^1 = p^K v^1$$

Se la matrice non è diagonalizzabile, non è semplicissimo calcolare gli altri termini. Si può comunque dire che

$$M^K \Big(\sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} v^{i,j} \Big) = \lambda_i^K \sum_{j=1}^{m_i} K^{j-1} w_{i,j} \qquad (18)$$

dove $w_{i,j}$ sono dei vettori (non tutti necessariamente diversi da 0) che dipendono dai coefficienti $c_{i,j}$ e comunque appartenenti a V_i.

Possiamo quindi dire da (17) e (18)

$$u^K = c_1 p^K v^1 + \sum_{i=2}^{s} \lambda_i^K \sum_{j=1}^{m_i} K^{j-1} w_{i,j} \qquad (19)$$

e quindi

$$\lim_{K \to \infty} p^{-K} u^K = c_1 v^1 \qquad (20)$$

Dim. di (20). $\quad p^{-K} u^K - c_1 v^1 = \sum_{i=2}^{s} \left(\frac{\lambda_i}{p} \right)^K \sum_{j=1}^{m_i} K^{j-1} w_{i,j}$

Poiché $|\lambda_i| < p$ $\quad \lim_{K \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{p} \right)^K K^j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ da cui il risultato.

(20) si esprime anche come

$$u^K \sim c_1 p^K v^1 \qquad \text{per } K \to \infty \qquad (21)$$

ossia si ha una crescita esponenziale con parametro $r = \log p$ e la struttura della popolazione diventa proporzionale all'autovettore v^1.