1 Cenni sulla teoria di Perron-Frobenius

Ricordo che $\sigma(A)$ è l'insieme degli autovalori di A (lo 'spettro' di A):

$$\sigma(A) = \{\lambda \in (C) : \exists\ v \neq 0\ t.c.\ Av = \lambda v\}.$$

Definiamo $\rho(A)$ (il 'raggio spettrale di A) e $s(A)$ (il 'limite spettrale' di A) come:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \qquad s(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \Re\lambda.$$

Ricordo che vale

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{||A^k||}.$$

Informalmente, possiamo scrivere

$$||A^k|| \approx (\rho(A))^k$$

per k grande.

In $\mathbb{R}^n$ è definito un ordine parziale:

$$v \leq w \text{ se } v_i \leq w_i\ i = 1 \dots n;$$

scriverò $v > 0$ se $v \geq 0$ e $v \neq 0$; $v \gg 0$ se $v_i > 0$ per $i = 1 \dots n$.

Sono noti (dalla teoria di Perron-Frobenius) i seguente risultati:

Teorema 1 *Sia $A \geq 0$ una matrice $(n \times n)$ nonnegativa. Allora*

1. *$\rho(A) = s(A)$ è un autovalore;*
2. *un autovettore v relativo a $\rho(A)$ è nonnegativo;*
3. *Si ha*

$$\rho(A) = \inf\{r \in \mathbb{R} : \exists\ v \gg 0\ t.c.\ Av \leq rv\} = \sup\{r \in \mathbb{R} : \exists\ v > 0\ t.c.\ Av \geq rv\}. \tag{1}$$

Ricordo la definizione

Definizione 1 *$A \geq 0$ si dice riducibile se esiste una matrice di permutazione P tale che*

$$PAP^t = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

dove B e D sono matrici quadrate.

A si dice irriducibile se non è riducibile.

In altre parole, A è riducibile se possiamo trovare un insieme non-vuoto (e con complementare non vuoto) S di indici tali che $a_{ij} = 0$ per $i \in S$ e $j \notin S$.

Ci sono moltissime definizioni equivalenti di irriducibilità. Ne elenco alcune:

- $A \geq 0$ è irriducibile se e solo se $(I + A)^n \gg 0$.
- $A \geq 0$ è irriducibile se e solo se per ogni coppia (i, j) esiste $q > 0$ tale che $a_{ij}^{(q)} > 0$. [$a_{ij}^{(q)}$ denota l'elemento (i, j) della matrice A^q]

La definizione più intuitiva di irriducibilità si ottiene costruendo un grafo orientato associato alla matrice nonnegativa A: i nodi del grafo sono gli elementi dell'insieme $\{1, \dots n\}$; si traccia il lato da i a j se $a_{ij} > 0$.

Si ha che A è irriducibile se e solo se per ogni coppia di nodi i e j esiste un cammino che va da i a j.

Per le matrici irriducibili la tesi del Teorema 1 può essere rafforzata:

Teorema 2 *Sia $A \geq 0$ irriducibile. Allora*

1. *$\rho(A) = s(A)$ è un autovalore semplice;*
2. *l'autovettore (unico a meno di multipli scalari) v relativo a $\rho(A)$ soddisfa $v \gg 0$ [oppure $v \ll 0$];*
3. *Non esiste alcun altro autovettore nonnegativo di A;*
4. *Tutti gli autovalori λ tali che $|\lambda| = \rho(A)$ sono semplici.*

L'ultima definizione che diamo è la seguente:

Definizione 2 *La matrice $A \geq 0$ si dice primitiva se esiste $m > 0$ tale che $A^m \gg 0$.*

Riguardando le definizioni equivalenti di irriducibilità, è evidente che una matrice primitiva è irriducibile.

Per le matrici primitive, si ha una conclusione più forte:

Teorema 3 *Sia $A \geq 0$ irriducibile. Allora*

$$\forall\ \lambda \in \sigma(A) \setminus \{\rho(A)\} \text{ si ha } |\lambda| < \rho(A) \iff A \text{ è primitiva.}$$

La dimostrazione di tutti questi teoremi, oltre al loro inquadramento in un contesto più ampio, si può trovare in molti libri, ad es. Minc, "Nonnegative matrices".

Infine un corollario dei teoremi precedenti riguarda le matrici i cui elementi fuori dalla diagonale sono nonnegativi. Applicando i teoremi precedenti a $A + sI$, dove $s \geq \max\{d_i,\ i = 1, \dots n\}$, si ha subito

Corollario 1 *Sia $A = B - D$, dove $B \geq 0$ e $D \geq 0$ diagonale. Allora $s(A)$ è un autovalore, con un autovettore corrispondente $v \geq 0$. Inoltre*

$$s(A) = \inf\{r \in \mathbb{R} : \exists\ v \gg 0 \text{ t.c. } Av \leq rv\} = \sup\{r \in \mathbb{R} : \exists\ v > 0 \text{ t.c. } Av \geq rv\}. \quad (2)$$

Se B è irriducibile, $s(A)$ è un autovalore semplice, l'autovettore (unico a meno di multipli scalari) v corrispondente soddisfa $v \gg 0$ [oppure $v \ll 0$] e non esiste alcun altro autovettore nonnegativo di A.

Applicando le caratterizzazioni (1) e (2) si ha poi il seguente risultato, che è quello che applicheremo più spesso:

Corollario 2 *Sia $A = B - D$, dove $B \geq 0$ e $D \geq 0$ diagonale e invertibile (e quindi $d_i > 0$ per $i = 1 \dots n$). Allora si ha*

$$s(A) < [>] 0 \iff \rho(BD^{-1}) = \rho(D^{-1}B) < [>] 1.$$

E' possibile generalizzare il corollario al caso in cui $A = B - M$, dove $B \geq 0$ e M è una M-matrice non singolare, definita come

Definizione 3 *M si dice M-matrice se $M = cI - K$, dove $K \geq 0$, $c \geq \rho(K)$ e I è la matrice identità.*

Abbiamo infatti il seguente risultato:

Corollario 3 *Sia $A = B - M$, dove $B \geq 0$ e M è una M-matrice. Allora si ha*

$$s(A) < [>] 0 \iff \rho(BM^{-1}) = \rho(M^{-1}B) < [>] 1.$$

Sia quindi $A = -M = K - cI$. Per definizione di M-matrice ($\rho(K) < c$) si ha

$$s(A) = \rho(K) - c < 0 \Longrightarrow 0 \notin \sigma(A)$$

ovvero la matrice $A = -M$ è invertibile.