

Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie.

Avvertenza. Queste note presuppongono che si sia già studiata la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, e vogliono solo richiamare un po' di concetti e tecniche che saranno utilizzati nel corso di Biomatematica. E' possibile che alcuni enunciati siano lievemente imprecisi; me ne scuso e invito alla consultazione dei testi seguenti nel caso di dubbi (A. Pugliese).

Le dimostrazioni dei risultati presentati qua si possono trovare in tutti i testi classici, ad esempio:

Hartman, P. *Ordinary differential equations*, Wiley (1973).

Un'introduzione più facile e più vicina allo spirito di queste note si può trovare in: Hirsch, M. e Smale, S. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press (1974)

oppure:

Brauer, F. e Nohel, J. *The qualitative theory of ordinary differential equations. An introduction*, Benjamin (1969).

Una un po più avanzata in:

Perko, L. *Differential equations and dynamical systems*, Springer (1991).

1. Esistenza e unicità della soluzione

Sia Ω un aperto di \mathbf{R}^n e J un intervallo aperto di \mathbf{R} . Consideriamo la funzione continua :

$$F : J \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n; (t, x) \rightarrow F(t, x)$$

e il problema corrispondente:

$$(P) \quad \begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $t_0 \in J$, $u_0 \in \Omega$.

Se F non dipende esplicitamente da t , il problema (P) si dice autonomo.

Sia $I \subset J$ un intervallo contenente t_0 , diremo che $u : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ è soluzione di (P) in I se:

$$(1) \quad u \in C^1(I; \mathbf{R}^n)$$

$$(2) \quad u \text{ verifica le relazioni in } (P)$$

Per ciò che riguarda l'esistenza di soluzioni per il problema (P) abbiamo anzitutto il seguente teorema:

Teorema 1. Per ogni $u_0 \in \Omega$ il problema (P) ammette almeno una soluzione in un opportuno intervallo $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$.

La seguente ipotesi, garantisce l'unicità:

$$(L.L) \quad \begin{cases} \text{per ogni } z \in \Omega \text{ e } [a, b] \subset J \text{ esistono } r > 0, L > 0 \text{ tali che :} \\ P(z, r) \subset \Omega \\ |F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in P(z, r), t \in [a, b] \subset J \end{cases}$$

tale condizione è una condizione di Lipschitz locale in x , uniforme in t , ed è equivalente alla seguente:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{per ogni compatto } [a, b] \times K \subset J \times \Omega \text{ esiste } L > 0 \text{ tale che risulti :} \\ |F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall (t, y) \in [a, b] \times K \end{cases}$$

Teorema 2. Sia verificata la (L.L) allora il problema (P) ammette al più una soluzione in un dato intervallo I .

Nella dimostrazione si usa il seguente lemma, utile anche in seguito:

Lemma 3. (Diseguaglianza di Gronwall) Siano α, β, u funzioni tali che:

$$\alpha, u \in C([a, b]; \mathbf{R}) \quad \beta \in L^1(a, b; \mathbf{R}) \quad \beta \geq 0 \quad \text{q.o.}$$

$$(4) \quad u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \quad \forall t \in [a, b]$$

allora risulta:

$$(5) \quad u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(\tau)d\tau} ds$$

Se in più α è non decrescente si ha :

$$(6) \quad u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}$$

La condizione (L.L.) è una condizione locale di Lipschitz. Si può avere anche una condizione globale di Lipschitz; precisamente:

Siano $J \equiv \mathbf{R}$, $\Omega \equiv \mathbf{R}^n$ ed $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ tale che:

$$(L) \quad \begin{cases} \text{per ogni } [a, b] \subset J \text{ esiste } L > 0 \text{ tale che} \\ |F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n, t \in [a, b] \end{cases}$$

In queste condizioni si ha:

Teorema 4. Sia $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ e sia verificata la condizione (L). Allora il problema (P) possiede una ed una sola soluzione in \mathbf{R} .

Osservazione 5. (Il caso lineare autonomo) Un caso particolare dell'ipotesi (L) è il caso *lineare autonomo*:

$$F(t, x) = Ax, \quad A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$$

In tal caso definiamo:

$$(7) \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad t \in \mathbf{R}$$

dove la serie converge in $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ per ogni t , uniformemente in ogni compatto di \mathbf{R} . Si ottiene:

$$(8) \quad e^{tA} \in C^1([a, b]; \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)), \quad \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

e quindi la soluzione del problema:

$$(9) \quad u'(t) = Au(t) \quad ; \quad u(t_0) = u_0$$

si esprime nel modo seguente:

$$(10) \quad u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0$$

E' noto che si può scrivere

$$e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} t^j e^{\lambda_i t}$$

dove $\{\lambda_i, i = 1 \dots p\}$ sono gli autovalori di A , m_i le loro molteplicità algebriche e $c_{i,j}$ sono vettori che dipendono linearmente da x_0 . Se λ_i è un autovalore semplice (ovvero $m_i = 1$), $c_{i,0}$ è la proiezione (relativamente agli alla somma diretta derivante dalla forma di Jordan di A) di x_0 sull'autospazio relativo a λ_i .

Se invece consideriamo il problema *non omogeneo*

$$(11) \quad u'(t) = Au(t) + f(t) \quad , \quad u(t_0) = u_0$$

dove si suppone $f \in C(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$, si verifica direttamente che la soluzione (unica) di (9) si esprime sulla forma seguente:

$$(12) \quad u(t) = e^{A(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} f(s) ds$$

La (12) è la *formula di variazione delle costanti*.

2. Soluzione massimale e maggiorazioni a priori

Da ora in poi, per semplicità, ci occuperemo del problema (P) nel caso autonomo, sempre sotto l'ipotesi di *continuità di F*, assumendo in più *l'unicità della soluzione* in qualunque eventuale intervallo di esistenza. Possiamo limitarci allo studio del problema

$$(P_0) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = F(u(t)); & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ogni altro caso si può ricondurre a questo.

Definiamo anzitutto la soluzione massimale di (P_0) . Posto

$$(1) \quad \tau_+(u_0) = \sup\{\theta > 0 \mid (P_0) \text{ ha soluzione in } [0, \theta]\}$$

osserviamo che grazie al teorema 1.1 di esistenza locale risulta $\tau_+(u_0) > 0$ per ogni $u_0 \in \Omega$. Per di più in ogni intervallo del tipo $[0, \theta] \subset [0, \tau_+(u_0))$ esiste la soluzione di (P_0) che indichiamo con $u_\theta \in C^1([0, \theta]; \mathbf{R}^n)$, e, se $\theta < \theta'$, risulta $u_\theta(t) = u_{\theta'}(t)$ per $t \in [0, \theta]$.

Dunque la seguente definizione è ben posta:

$$(2) \quad u(t) = u_\theta(t), \quad t \in [0, \tau_+(u_0))$$

dove θ è scelto arbitrariamente in $(t, \tau_+(u_0))$. Con tale definizione $u(t)$ è l'unica soluzione di (P_0) in $[0, \tau_+(u_0))$ e si dice *soluzione massimale di (P_0)* .

Nel seguito indicheremo spesso con $u(t, x)$ tale soluzione massimale, per mettere in evidenza il dato iniziale x . Se $\tau_+(x) = +\infty$, allora $u(t, x)$ è *soluzione globale di (P_0)* . La soluzione massimale non può essere prolungata ad una soluzione in un intervallo contenente strettamente $[0, \tau_+(u_0))$ (da ciò la denominazione di massimale) infatti si ha:

Proposizione 1. Se $\tau_+(u_0) < +\infty$, il problema (P_0) non ha soluzione in $[0, \tau_+(u_0)]$.

Conseguenza della Proposizione 1 è il seguente

Teorema 2. Sia $K \subset \Omega$ compatto, $u_0 \in K$. Se $\tau_+(u_0) < +\infty$ allora esiste $\bar{t} \in [0, \tau_+(u_0))$ tale che

$$u(\bar{t}, u_0) \notin K$$

Si ha subito:

Corollario 3. Sia $K \subset \Omega$, compatto, se risulta $u(t, u_0) \in K$, per ogni $t \in [0, \tau_+(u_0))$, allora $\tau_+(u_0) = +\infty$

Questo corollario si usa soprattutto in un caso particolare:

Proposizione 4. Sia $\Omega = \mathbf{R}^n$ e supponiamo che per ogni $T > 0$ esista M_T tale che:

$$(3) \quad |u(t, u_0)| \leq M_T, \quad \forall t \in [0, \tau_+(u_0)) \cap [0, T]$$

allora $\tau_+(u_0) = +\infty$

Se sono verificate le ipotesi della Proposizione 4 diremo che la $u(t, u_0)$ ammette una *maggiorazione a priori*.

3. Dipendenza continua dai dati

Consideriamo la funzione

$$(1) \quad (t, x) \rightarrow u(t, x) : W \equiv \{(t, x); x \in \Omega, t \in (\tau_-(x), \tau_+(x))\} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

dove $\tau_-(x) < 0$ è definito analogamente a $\tau_+(x)$ come l'estremo inferiore degli intervalli di definizione di una soluzione locale.

Si ha:

Proposizione 1. *Se F soddisfa la condizione (L.L) allora anche la funzione definita in (1) verifica la condizione (L.L), in particolare è continua.*

In realtà per ottenere la continuità della funzione (10), è sufficiente supporre la continuità di f oltre a qualche condizione che garantisca l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. Si può inoltre dimostrare una continuità anche rispetto a variazioni del secondo membro dell'equazione.

4. Terminologia

Consideriamo solo il caso dei sistemi autonomi e supponiamo d'ora in poi che $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ sia C^1 ; la condizione (L.L.) è quindi automaticamente verificata. Usiamo una notazione differente per la funzione definita da (3.1). Precisamente poniamo

$$(1) \quad \Omega(t) = \{x : (t, x) \in W\} = \{x : \tau_-(x) < t < \tau_+(x)\}$$

notiamo che $\Omega(t)$ è un aperto (eventualmente vuoto) contenuto in Ω . Definiamo ora le mappe

$$\Phi_t : \Omega(t) \rightarrow \Omega$$

come $\Phi_t(x) = u(t, x)$ (la soluzione al tempo t di (2) che vale x al tempo 0, che spesso denoteremo anche con $x(t)$).

La collezione di mappe Φ_t si chiama il *flusso* associato all'equazione differenziale

$$(2) \quad x' = F(x)$$

. Queste mappe sono continue per la Proposizione 3.1 (in realtà sono anche differenziabili se $F \in C^1$) e sono anzi degli omeomorfismi da $\Omega(t)$ in $\Omega(-t)$. Godono inoltre delle seguenti proprietà:

- i) $\Phi_0(x) = x \quad \forall x \in \Omega$
- ii) $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t(\Phi_s(x)) \quad \forall t, s \in \mathbf{R}$

La proprietà ii) (che si dimostra grazie all'unicità delle soluzioni di (P)) va interpretata nel senso che ogni volta che uno dei membri dell'uguaglianza è definito, è definito anche l'altro membro ed essi sono uguali.

Possiamo dire che la collezione di mappe Φ_t sugli insiemi $\Omega(t)$ definisce un *sistema dinamico*. Nella definizione di sistema dinamico si richiede usualmente di avere delle mappe continue Φ_t definite per ogni $t \geq 0$ su uno spazio metrico fissato Ω che soddisfano (i)-(ii); tali differenze non sono però essenziali.

Per ogni $x \in \Omega$ la *traiettoria positiva* che parte da x è la mappa $t \rightarrow \Phi_t(x)$ per $0 \leq t < \tau_+(x)$. L'immagine della traiettoria positiva è la *semiorbita positiva* $O_+(x)$ che è quindi un sottoinsieme di Ω . Analogamente si definiscono la traiettoria e la semiorbita $O_-(x)$ negative. Infine $O(x) = O_+(x) \cup O_-(x)$ è l'orbita che parte da x .

Un sottoinsieme $X \subset \Omega$ si dice *positivamente invariante* se $O_+(x) \subset X$ per ogni $x \in X$; *negativamente invariante* se $O_-(x) \subset X$ per ogni $x \in X$. Infine si dice *invariante* se è sia positivamente sia negativamente invariante.

Notiamo che se esiste K compatto positivamente invariante, allora $\tau_+(x) = \infty$ per ogni $x \in K$; questo è il Corollario 2.3.

Se \bar{x} è tale che $F(\bar{x}) = 0$ risulta ovviamente $O(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. \bar{x} si dice un *equilibrio*.

Se esiste $T > 0$ tale che $\Phi_T(x) = x$ mentre $\Phi_t(x) \neq x$ per $0 < t < T$, si ha che $\Phi_t(x)$ è definita per ogni $t \in \mathbf{R}$ e si ha $\Phi_t(x) = \Phi_{t+T}(x)$. $O(x) = \{\Phi_t(x), 0 \leq t \leq T\}$ si dice un'orbita periodica e T il suo periodo.

L'ultimo caso possibile di orbite si ha quando $\Phi_t(x)$ preso come funzione di t è iniettiva, e quindi l'orbita è omeomorfa a una retta.

Orbite interessanti, degne di un nome, sono quelle *eterocliniche* e *omocliniche*. Se $\Phi_t(x)$ è definito per ogni $t \in \mathbf{R}$ ed è tale che $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = \bar{x}_1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = \bar{x}_2$, dove \bar{x}_1 e \bar{x}_2 sono equilibri, $O(x) = \{\Phi_t(x), -\infty < t < +\infty\}$ si dice un'orbita eteroclinica. Se poi $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, l'orbita si dice omoclinica.

Ci interessano principalmente le traiettorie definite per ogni $t > 0$ ed il loro comportamento asintotico. Per ottenere più informazioni su quest'ultimo, è utile introdurre l'insieme ω -limite.

L'insieme ω -limite di un punto $x \in \Omega$ ovvero di una soluzione di (2) $x(t)$ è definito come segue:

$$\omega(x) = \{y \in \Omega \text{ t. c. esiste una successione } t_k, t_k \rightarrow \infty \text{ e } x(t_k) \rightarrow y\}$$

L'insieme α -limite è definito analogamente, eccetto che la successione t_k tende a $-\infty$.

Si dimostra

Proposizione 1. $\omega(x)$ è chiuso e invariante.

Proposizione 2. Se $O_+(x)$ ha chiusura compatta, $\omega(x)$ è non vuoto e connesso.

Proposizione 3. Se $\omega(x)$ è compatto, allora

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{y \in \omega(x)} |x(t) - y| = 0$$

(3) esprime il fatto che la traiettoria positiva "tende" all'insieme ω -limite.

5. La stabilità e la linearizzazione

Definizione 1. Un equilibrio \bar{x} è stabile se

$$(1) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in U_\delta(\bar{x}) \tau_+(x) = +\infty \text{ e } |\Phi_t(x) - \bar{x}| < \epsilon.$$

Con $U_\delta(x)$ intendiamo l'intorno aperto di centro x e raggio δ .

Definizione 2. Un equilibrio \bar{x} è asintoticamente stabile se è stabile ed esiste $\delta > 0$ tale che

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = \bar{x} \quad \forall x \in U_\delta(\bar{x})$$

Notiamo che per dire che un equilibrio è asintoticamente stabile è necessario che sia stabile. E' infatti possibile che un equilibrio verifichi la condizione (2) senza soddisfare (1).

Definizione 3. Il bacino di attrazione di un equilibrio \bar{x} asintoticamente stabile è l'insieme dei punti x tali che $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = \bar{x}$. Dato $X \subset \Omega$, un equilibrio \bar{x} è globalmente (in X) asintoticamente stabile se il suo bacino di attrazione comprende X .

Definizione 4. Un equilibrio è instabile se non è stabile.

Si possono dare definizioni analoghe di stabilità (asintotica e globale) per soluzioni $x(t)$ non di equilibrio di (4.2).

Cominciamo a considerare la stabilità per i sistemi lineari

$$(3) \quad x' = Ax$$

E' chiaro che 0 è l'unico equilibrio di (3). Le altre soluzioni le possiamo scrivere nella forma (1.10). Da questa rappresentazione si ottiene quindi

Teorema 2. Per l'equazione (3) 0 è (globalmente in \mathbf{R}^n) asintoticamente stabile se e solo se

$$(7) \quad \sigma(A) \subset \{\lambda : \Re \lambda < 0\}$$

Se

$$(8) \quad \sigma(A) \cap \{\lambda : \Re \lambda > 0\} \neq \emptyset$$

0 è instabile.

Infine un criterio per la stabilità (non asintotica) è che tutti gli autovalori abbiano parte reale nonpositiva e che gli autovalori a parte reale 0 siano semplici.

Dalla rappresentazione in forma di Jordan di A possiamo avere una rappresentazione geometrica del flusso associato a (3). Infatti, per ogni autovalore λ_i di A esiste un

sottospazio associato X_i (l'autospazio generalizzato relativo a λ_i) di dimensione m_i (la molteplicità algebrica di λ_i) tale che $AX_i \subset X_i$ e di conseguenza $e^{At}X_i \subset X_i$. Se $v \in X_i$

$$e^{At}v = e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{m_i-1} t^j c_j$$

dove c_j sono le proiezioni del vettore v su una opportuna base del sottospazio X_i .

L'intero spazio si potrà scrivere come somma diretta dei sottospazi X_i , al variare di tutti gli autovalori λ_i .

Nel caso λ_i sia complesso, anche il sottospazio X_i sarebbe complesso. In questi casi, è più comodo usare una forma reale di Jordan, sostituendo ai sottospazi relativi a λ_i e al coniugato $\bar{\lambda}_i$ (ognuno di dimensione m_i), il sottospazio reale \tilde{X}_i (di dimensione $2m_i$) formato dalle parti reali e immaginarie dei vettori di X_i . Anche in questo caso si ha $AX_i \subset X_i$ e di conseguenza $e^{At}X_i \subset X_i$, ma la rappresentazione dell'esponenziale risulta, e $v \in \tilde{X}_i$

$$e^{At}v = e^{\Re\lambda_i t} \sum_{j=0}^{m_i-1} t^j (a_j \cos(\Im\lambda_i t) + b_j \sin(\Im\lambda_i t)).$$

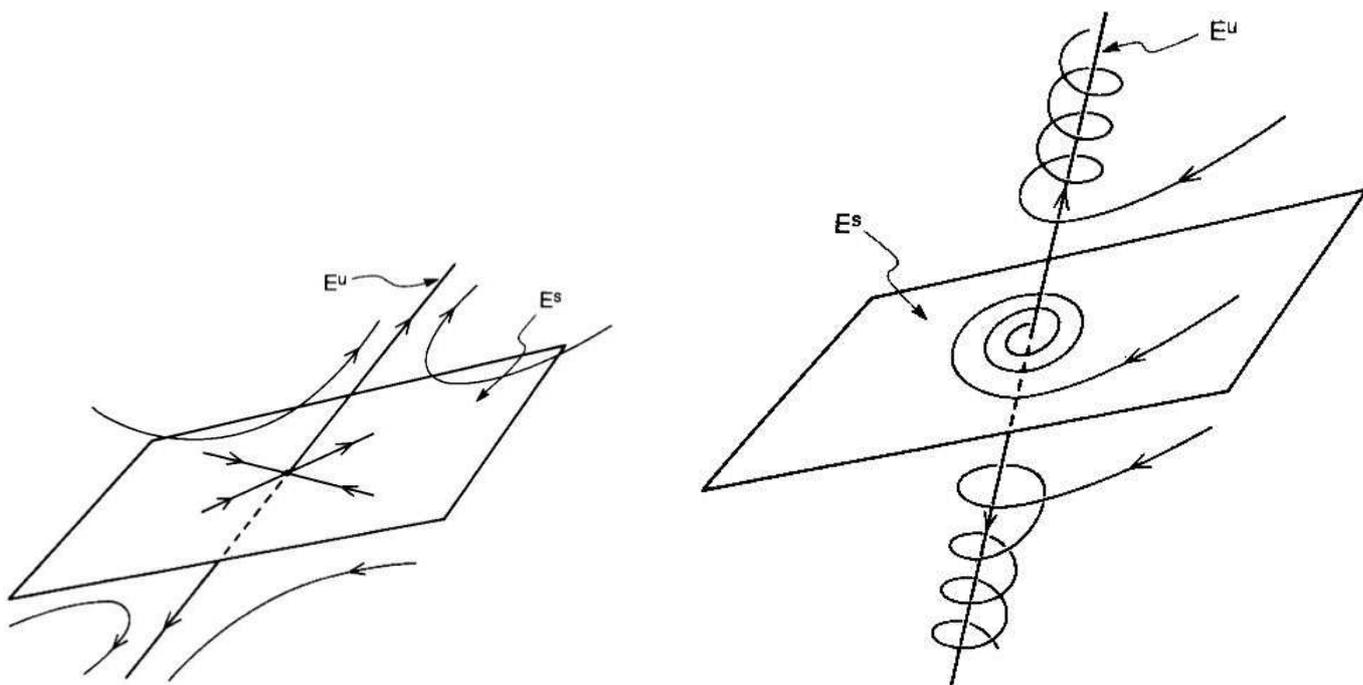
In ogni caso, possiamo dividere gli autovalori in tre gruppi, quelli a parte reale positiva, negative e nulla e definire i tre sottospazi X^u , X^s e X^c .

X^u sarà la somma diretta dei sottospazi X_i (o \tilde{X}_i per i λ_i complessi) per tutti i λ_i con $\Re\lambda_i > 0$.

Analogamente X^s sarà la somma diretta dei sottospazi X_i (o \tilde{X}_i per i λ_i complessi) per tutti i λ_i con $\Re\lambda_i < 0$, e X^c sarà la somma diretta dei sottospazi X_i (o \tilde{X}_i per i λ_i complessi) per tutti i λ_i con $\Re\lambda_i = 0$.

I tre sottospazi sono invarianti per A e quindi anche per e^{At} . Se $v \in X^u$, si vede dalle espressioni per e^{At} che $e^{At}v$ tende a infinito esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$, mentre tende a 0 per $t \rightarrow -\infty$. [il suffisso u del sottospazio sta per *unstable*, instabile]. Al contrario se $v \in X^s$ [s per stabile], si vede dalle espressioni per e^{At} che $e^{At}v$ tende a 0 esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$, mentre tende a infinito per $t \rightarrow -\infty$. Infine, se $v \in X^c$ [c per centro], $e^{At}v$ può essere costante, oppure può muoversi su un cerchio intorno a 0, ovvero può tendere all'infinito (per $t \rightarrow \pm\infty$) in modo polinomiale, a seconda del fatto che gli autovalori corrispondenti siano 0 o immaginari e che essi abbiano molteplicità algebriche uguali alle geometriche o no.

Possiamo quindi visualizzare il flusso corrispondente a e^{At} tracciando i tre sottospazi X^u , X^s e X^c ed il flusso su ognuno di essi. Alcuni esempi (tutti, per semplicità, senza il sottospazio X^c , ossia assumendo che non ci siano autovalori con parte reale nulla) sono illustrati nella figura seguente (tratta dal libro di S. Wiggins, *Introduction to applied non-linear dynamical systems and chaos*, Springer, 1990).



Due esempi in 3 dimensioni di flussi corrispondenti a e^{At} ; in entrambi i casi il sottospazio X^u è unidimensionale, e il sottospazio X^s bidimensionale.

Il criterio per la stabilità asintotica del Teorema 2 corrisponde al caso in cui entrambi i sottospazi X^c e X^u siano nulli. Per poterlo applicare, risulta utile avere criteri per stabilire il segno della parte reale degli autovalori di una matrice. Vale il seguente criterio per le radici dei polinomi; esso si può usare come criterio per gli autovalori, considerando il polinomio caratteristico.

Teorema 3 (criterio di Routh-Hurwitz). Consideriamo il polinomio

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

e la matrice $n \times n$ $((H_{ij}))$, dove

$$H_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j} & \text{se } 0 < 2i - j \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora le radici del polinomio hanno, tutte, parte reale negativa, se e solo se i minori principali della matrice sono tutti positivi.

Osservazione 4. Se $n = 2$ si può considerare direttamente il polinomio caratteristico di A per ottenere il seguente criterio. Se $\det A < 0$ si hanno due autovalori reali di segno opposto. Se $\det A > 0$ e $\text{tr} A > 0$ si hanno due autovalori (reali o complessi) con parte reale positiva. Se, infine $\det A > 0$ e $\text{tr} A < 0$, ambo gli autovalori (reali o complessi) hanno parte reale negativa; quest'ultimo è quindi il criterio per la stabilità asintotica di 0.

Esempio 4bis. Come esempio del criterio di Routh-Hurwitz possiamo considerare il caso di $n = 3$ per il quale si ha:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Le condizioni del criterio si traducono in

$$(8b) \quad a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$$

Esempio 4ter. Nel caso di una matrice A 3×3 il polinomio caratteristico è di grado 3 e si può applicare (8b). Cambiandone per comodità il segno si ha:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -\operatorname{tr} A \quad a_2 = \sum M_2 \quad a_3 = -\det A$$

dove con $\sum M_2$ si intende la somma dei tre minori principali di ordine 2 di A . Il criterio per la stabilità asintotica di 0 per il sistema tridimensionale $x' = Ax$ si può quindi scrivere

$$\operatorname{tr} A < 0, \quad \det A < 0, \quad \sum M_2 > 0, \quad \operatorname{tr} A \cdot \sum M_2 < \det A.$$

Passiamo ora ai sistemi nonlineari, e consideriamo in particolare

$$(9) \quad y' = Ay + g(y)$$

dove g è una funzione Lipschitziana in $B(0, r)$ per qualche $r > 0$,

$$(10) \quad g(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0$$

Teorema 5. Sotto l'ipotesi (10) l'equilibrio 0 del sistema (9) è asintoticamente stabile se

$$(7) \quad \sigma(A) \subset \{\lambda : \Re \lambda < 0\}$$

Se

$$(8) \quad \sigma(A) \cap \{\lambda : \Re \lambda > 0\} \neq \emptyset$$

0 è instabile.

Le conclusioni del Teorema 2 si trasportano quindi dal sistema (2) a quello (9), tranne quanto riguarda la stabilità non asintotica e l'attrattività globale. Questo procedimento si chiama linearizzazione perché se partiamo da un generico sistema nonlineare

$$(11) \quad x' = f(x)$$

dove $f \in C^1$ e ne consideriamo un equilibrio \bar{x} , cioè $f(\bar{x}) = 0$, possiamo applicare la formula di Taylor ottenendo

$$f(x) = Df_{\bar{x}}(x - \bar{x}) + \phi(x) \quad \text{dove} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|\phi(x)|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

dove $Df_{\bar{x}}$ è lo Jacobiano di f calcolato in \bar{x} .

(11) può essere posto nella forma (9) ponendo $y = x - \bar{x}$, $A = Df_{\bar{x}}$, $g(y) = \phi(\bar{x} + y)$. Si ottiene quindi

Corollario 6. Sia \bar{x} un equilibrio di (11) dove $f \in C^1$. Sia $A = Df_{\bar{x}}$. Se

$$(7) \quad \sigma(A) \subset \{\lambda : \Re\lambda < 0\}$$

\bar{x} è asintoticamente stabile. Se

$$(8) \quad \sigma(A) \cap \{\lambda : \Re\lambda > 0\} \neq \emptyset$$

\bar{x} è instabile.

Il caso in cui \bar{x} sia instabile può essere distinto come segue

Definizione 7. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale positiva, \bar{x} si dice *completamente instabile*. Se esistono autovalori di A sia a parte reale positiva sia a parte reale negativa, \bar{x} si dice *punto di sella*.

Teorema 7. Se \bar{x} è un punto di sella, ed inoltre non esistono autovalori a parte reale nulla, esiste un intorno U di \bar{x} e due varietà differenziali $W_{loc}^s(\bar{x})$ e $W_{loc}^u(\bar{x})$ con la seguente proprietà:

$$W_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = \bar{x} \quad e \quad \Phi_t(x) \in U \forall t \geq 0\}$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x) = \bar{x} \quad e \quad \Phi_t(x) \in U \forall t \leq 0\}.$$

Inoltre, posto n_s la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori a parte reale negativa, e E_s la somma diretta degli autospazi generalizzati relativi a tali autovalori, e rispettivamente $n_u = n - n_s$ la somma delle molteplicità algebriche ed E_u la somma diretta degli autospazi relativi agli autovalori a parte reale positiva, si ha che $\dim W_{loc}^s(\bar{x}) = n_s$, $\dim W_{loc}^u(\bar{x}) = n_u$, che W^s è tangente in \bar{x} a E_s e W^u a E_u .

Il teorema (per una dimostrazione vedi Coddington E.A. e Levinson N., *Theory of ordinary differential equations*, Teoremi 13.4.1, 13.4.2) si capisce meglio limitandosi al caso $n = 2$ con un autovalore positivo ed uno negativo.

Proposizione 8. Se \bar{x} è completamente instabile, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in U_\delta(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$ esiste T tale che $\Phi_T(x) \notin U_\delta(\bar{x})$.

Nel caso che \bar{x} sia un punto di sella la Proposizione 8 viene indebolita come segue. Esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in U_\delta(\bar{x})/W_{loc}^s(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$ esiste T tale che $\Phi_T(x) \notin U_\delta(\bar{x})$.

Una dimostrazione si trova sempre sul Coddington e Levinson (Teorema 13.5.1). La Proposizione 8 si dimostra facilmente direttamente, seguendo i metodi dello Hirsch e Smale.

6. Il metodo di Liapunov

La linearizzazione fornisce solo risultati locali. Risultati globali di stabilità per sistemi nonlineari si possono ottenere con il metodo di Liapunov. Qua presentiamo pochi risultati che useremo in seguito, scritti nel caso più semplice.

Teorema 1. Consideriamo il sistema $x' = f(x)$ dove $f(0) = 0$ e sia U un intorno di 0 . Se esiste una funzione $V : U \rightarrow \mathbf{R}$, $V \in C^1$ tale che $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ per $y \neq 0$ e tale che posto

$$(1) \quad V^*(y) = \nabla V(y) \cdot f(y)$$

risulti $V^*(y) \leq 0$ per $y \in U$, allora 0 è stabile.

Teorema 2. Se, nelle stesse ipotesi del Teorema 1, risulta $V^*(y) < 0$ per $y \neq 0$ si ha che 0 è asintoticamente stabile.

L'ultimo risultato indebolisce le ipotesi su V , richiedendo poi un maggiore studio del sistema specifico in esame.

Teorema 3. Sia G un insieme chiuso positivamente invariante. Sia $V \in C^1(G; \mathbf{R})$ e tale che $V^*(y) \leq 0$ per ogni $y \in G$. Allora per ogni $x \in G$ risulta

$$(2) \quad \omega(x) \subset \{y \in G : V^*(y) = 0\}$$

Proof. Sia $y \in \omega(x)$ e supponiamo $V^*(y) < 0$. Poiché

$$\frac{d}{dt} \Phi_t(z)|_{t=t_0} = V^*(\Phi_{t_0}(z))$$

abbiamo

$$(3) \quad V(\Phi_t(y)) < V(y) \quad \forall t > 0.$$

Per lo stesso motivo, $V(\Phi_t(x))$ è monotona non-crescente, e quindi

$$(4) \quad V(\Phi_t(x)) \geq V(y) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

D'altra parte, poiché $\omega(x)$ è invariante, per ogni $t > 0$, $\Phi_t(y)$ deve essere limite di una successione $\Phi_{t_k}(x)$; questo è in contraddizione con (3) e (4), data la continuità di V .

7. La teoria di Poincaré-Bendixson

Per i sistemi planari ($n = 2$) $\dot{x} = f(x)$ valgono i seguenti teoremi molto importanti (vedi Perko, da cui questa forma degli enunciati è tratta, per maggiori dettagli).

Teorema 7.1 (Poincaré-Bendixson). Sia $f \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$ dove Ω è un aperto di \mathbf{R}^2 e sia $x_0 \in \Omega$ tale che $O_+(x_0) \subset F$, F compatto. Allora se $\omega(x_0)$ non contiene punti di equilibrio¹, $\omega(x_0)$ è un'orbita periodica².

Teorema 7.2 (Poincaré-Bendixson generalizzato). Sia $f \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$ dove Ω è un aperto di \mathbf{R}^2 e sia $x_0 \in \Omega$ tale che $O_+(x_0) \subset F$, F compatto. Inoltre esista un numero finito di punti di equilibrio in F . Allora $\omega(x_0)$ ricade in uno dei tre seguenti casi:

- (i) $\omega(x_0)$ è un punto di equilibrio;
- (ii) $\omega(x_0)$ è un'orbita periodica;
- (iii) $\omega(x_0)$ è un *ciclo singolare*, ossia è l'unione di un numero finito di punti di equilibrio $\{x_1, \dots, x_k\}$ e di un numero finito (o infinità numerabile) di orbite eterocliniche i cui insiemi α - e ω - limite coincidano con uno dei punti $\{x_1, \dots, x_k\}$ ³.

Per escludere l'esistenza di orbite periodiche o cicli singolari si può usare il seguente criterio:

Teorema (Bendixson). Se $\operatorname{div} f > 0$ [< 0] in un aperto G , non esistono in G orbite periodiche o cicli singolari.

Proof. Sia γ un'orbita periodica di periodo T e H la regione da essa racchiusa. Applicando il teorema della divergenza risulta

$$(BX) \quad \iint_H \operatorname{div} f \, dx = \int_{\gamma} f \cdot \vec{n} \, ds = \pm \int_0^T [f_1(x(t), y(t))\dot{y}(t) - f_2(x(t), y(t))\dot{x}(t)]$$

dove $(x(t), y(t))$ è la soluzione corrispondente all'orbita periodica (che viene scelta come parametrizzazione di γ nell'integrale), \vec{n} la normale esterna che è uguale a

$$\pm \frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

¹ ossia $y \in \omega(x_0) \implies f(y) \neq 0$

² ossia se $y \in \omega(x_0)$, esiste T minimo tale che $\Phi_T(y) = y$ $\omega(x_0) = \{\Phi_t(y), 0 \leq t \leq T\}$ dove T è chiaramente indipendente dalla scelta di y .

³ ossia detta O_j una di queste orbite, si ha $O_j = \{\Phi_t(y), t \in (-\infty, +\infty)\}$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(y) = x_{j_1}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(y) = x_{j_2}$ dove $j_1, j_2 \in \{1, \dots, k\}$ e si può anche avere $j_1 = j_2$ (orbita omoclinica).

Poiché $(x(t), y(t))$ risolve l'equazione il lato destro di (BX) è uguale a 0. Per l'ipotesi del teorema il lato sinistro di (BX) è o strettamente positivo o negativo. In ambedue i casi si ha una contraddizione.

Nel caso di un ciclo singolare si può applicare ugualmente il teorema della divergenza, visto che la frontiera di H sarebbe comunque C^1 a tratti. L'integrale sulla frontiera si scriverà poi come somma di diversi integrali, corrispondenti alle varie soluzioni eterocliniche, tutti uguali a zero. La conclusione quindi è analoga.

Teorema (Dulac). *Se esiste una funzione $B : G \in \mathbf{R}$ tale che $\operatorname{div}(Bf) > 0$ [< 0] in un aperto G , non esistono in G orbite periodiche o cicli singolari.*

La dimostrazione è identica a quella del teorema precedente, moltiplicando per B dappertutto.

Dalla dimostrazione è anche chiaro che si può indebolire lievemente l'ipotesi alla richiesta che sia $\operatorname{div}(Bf) \leq 0$ [≥ 0] in un aperto G e che la misura dell'insieme $\{x \in G : \operatorname{div}(Bf)(x) = 0\}$ sia uguale a 0.