Sul Teorema del Passo di Montagna in $\mathbb{R}^n$

Fabio Bagagiolo

Note redatte da Laura Facchini

Scopo di queste note è quello di illustrare e dimostrare il cosiddetto "Teorema del Passo di Montagna" in $\mathbb{R}^n$, che dà condizioni sufficienti per l'esistenza di punti stazionari (o critici) per funzioni di più variabili.

Come è noto, i concetti di continuità, derivabilità parziale, differenziabilità... sono soggetti ad un "drastico" cambiamento nel passaggio da dimensione 1 a dimensione 2; mentre non notiamo sostanziali differenze nel passaggio da dimensione 2 a dimensioni maggiori. Uno dei motivi principali è quello della differenza del "numero di gradi di libertà" nel muoversi in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Questa differenza si riscontra anche nel problema dell'esistenza di punti stazionari. In queste note, a partire dal Teorema di Rolle in una dimensione, attraverso esempi e controesempi, arriveremo al Teorema del Passo di Montagna in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo infine che, per funzioni di due variabili a valori reali, interpretando il grafico della funzione come un paesaggio montano, i punti critici di sella possono essere visti come veri e propri valichi o, appunto, passi di montagna.

Fatto 1:

Riprendiamo l'enunciato standard del Teorema di Rolle e enunciamone anche una versione alternativa.

Teorema 1 (Rolle). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a,b); se $f(a) = f(b)$, allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Teorema 2 (Rolle, versione alternativa). *Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$; se $f(x) < f(y)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$ e $\forall y \in [a,b]$, allora $\exists c \in [a,b]$ tale che $f'(c) = 0$.*

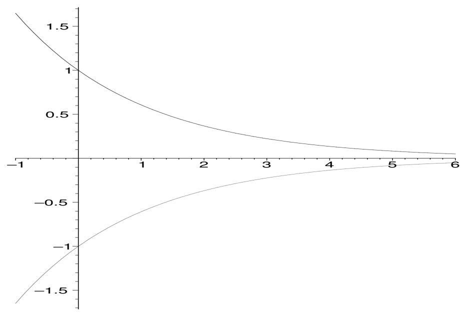
Quest'ultima versione è abbastanza intuitiva, infatti se in $[a,b]$ ho che l'altezza minima della funzione è $k \in \mathbb{R}$, per collegare due punti "separati" dall'intervallo $[a,b]$, di quota inferiore a k, devo necessariamente passare per una sommità, contenuta in $[a,b]$ (o per un punto "piatto" nel caso in cui la funzione sia costante in $[a,b]$).

Si potrebbe pensare che una cosa simile accada anche in $\mathbb{R}^n$. Purtroppo la seguente congettura risulta falsa

Congettura 1 (falsa). *Se l'insieme* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) < k, k \in \mathbb{R}\}$ *è sconnesso*[1]*, allora* $\exists x \in \mathbb{R}^2$ *stazionario.*

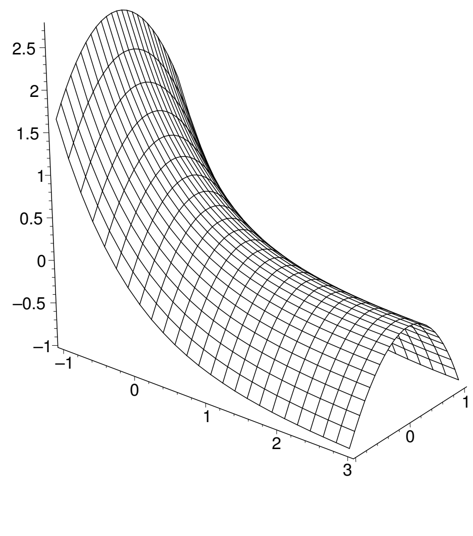
Controesempio Prendiamo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ tale che $f(x,y) = e^{-x} - y^2$. Notiamo che $E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) < 0\}$ è sconnesso, infatti

$$E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > e^{-\frac{x}{2}}\} \dot\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < -e^{-\frac{x}{2}}\}$$



è l'unione di due insiemi disgiunti. Quindi verificherebe l'ipotesi, ma tale funzione non presenta punti stazionari, infatti $\nabla f(x,y) = (-e^{-x}, -2y)$ non si annulla mai su $\mathbb{R}^2$. Notiamo comunque che

$$\nabla f(x,0) = (-e^{-x}, 0) \stackrel{x \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0).$$



Questo è un grafico della funzione analizzata. Come si può notare, se passiamo da un punto appartenente a E_0 ad un altro "dall'altra parte

[1] Un insieme X si dice *sconnesso* se esistono due sottoinsiemi A e B di X aperti in X e non vuoti, che assieme costituiscono X ma sono disgiunti, ovvero tali che $X = A \cup B$ e $A \cap B \neq \varnothing$.

della montagna", non passeremo per un massimo locale o un punto di sella. Si può "scavalcare" la regione $f \geq 0$ con cammini del tipo $P_m : [-1, 1] \to (m, t)$ con $m \in \mathbb{N}$. In tal caso $f(P_m(t))$ ha un massimo in $t = 0$, ma il gradiente di f in quel punto non è nullo: il piano tangente non è orizzontale, ma tende a diventarlo quando $m \to +\infty$.

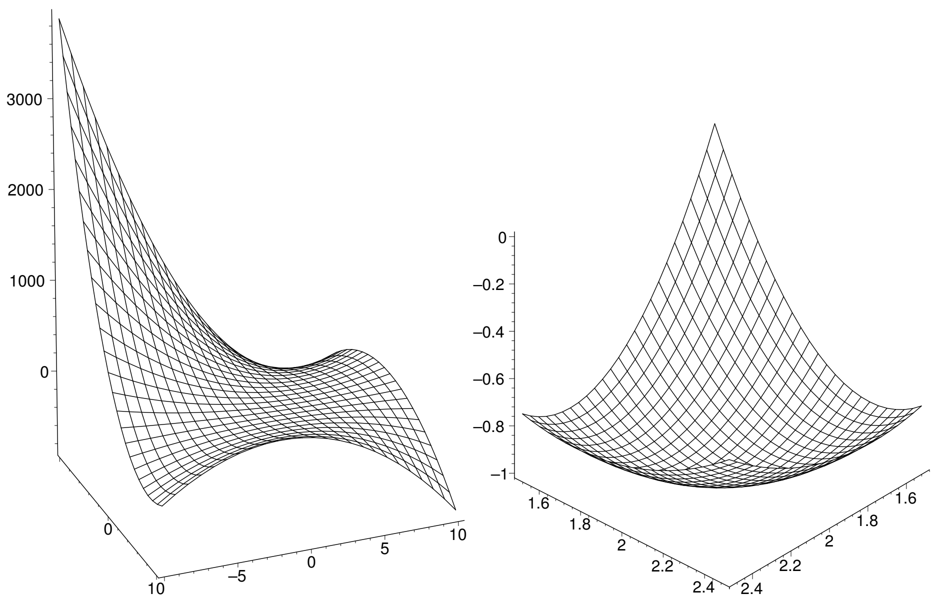
Fatto 2:

Non esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ con un punto di minimo locale stretto che però non è un punto di minimo assoluto e che non abbia punti di massimo locale.

Si potrebbe pensare che questo sia vero anche in $\mathbb{R}^n$. Putroppo, anche questa congettura è falsa. Per mostrarlo, consideriamo $f(x, y) = (3-x)(3-y)(3-x-y)$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Longrightarrow (x, y) = \begin{cases} (3,3) & \text{sella} & f(3,3) = 0 \\ (3,0) & \text{sella} & f(3,0) = 0 \\ (0,3) & \text{sella} & f(0,3) = 0 \\ (2,2) & \text{minimo} & f(2,2) = -1 \end{cases}$$

$(2, 2)$ è un punto di minimo locale stretto, ma non ci sono punti di massimo locale, come si può vedere dai grafici.



Notiamo che il punto di massimo locale non c'è, ma ci sono comunque altri punti critici oltre al minimo, ovvero le tre selle.

Passiamo ora al teorema del Passo di Montagna in $\mathbb{R}^n$, che dà, appunto, condizioni sufficienti per l'esistenza di punti critici. Ci sono due enunciati in qualche modo equivalenti di tale teorema.

Teorema 3 (Teorema del Passo di Montagna, prima versione). *Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ una funzione coercitiva*[2] *tale che $f(0) = 0$. Se esistono $\rho, \alpha > 0$ tali che $||x|| = \rho \Rightarrow f(x) > \alpha$ e $\exists x_1$ tale che $||x_1|| > \rho$ e $f(x_1) > \alpha$, allora $\exists \overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \neq 0$, $\overline{x} \neq x_1$ punto critico per f, ma non di minimo, e*

$$f(\overline{x}) = \inf_{p \in P}\{\max_{x \in p} f(x)\}$$

ove $P = \{p \in \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R}^n) : p(0) = 0, p(1) = x_1\}$.

Teorema 4 (Teorema del Passo di Montagna, seconda versione). *Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ una funzione coercitiva. Se esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ di minimo locale stretto, allora $\exists x_3 \in \mathbb{R}^n$, $x_3 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_2$ punto critico per f, ma non di minimo e*

$$f(x_3) = \inf_{s \in S}\{\max_{x \in s} f(x)\} = \beta$$

ove $S = \{s \subseteq \mathbb{R}^n : x_1, x_2 \in s, s$ connesso e compatto[3]*$\}$*[4]*.*

Osserviamo che, interpretando gli insiemi $s \in S$ come "sentieri" per passare da x_1 a x_2, il punto critico è dato da quello che "minimizza la quota massima" da ciascuno di questi sentieri.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $\beta \in \mathbb{R}$, perché $x_1, x_2 \in s \; \forall s \in S$. Poiché S è compatto, ho che

$$\max_{x \in s} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Inoltre

$$\max_{x \in s} f(x) \geq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \Rightarrow \inf_{s \in S}\{\max_{x \in s} f(x)\} \in \mathbb{R}.$$

Per la definizione di estremo inferiore, esiste una successione $\{s_m\}_m \subseteq S$ minimizzante tale che

$$\lim_{m \to +\infty}\{\max_{x \in s_m} f(x)\} = \beta.$$

Infatti $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \overline{m} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \overline{m} \Rightarrow \beta \leq \max_{x \in s_m} f(x) \leq \beta + \varepsilon.$$

[2]Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *coercitiva* se $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$, ovvero se $\forall M > 0 \; \exists R > 0$ tale che $||x|| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$.

[3]Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato.

[4]La condizione di coercitività può essere indebolita dalla seguente condizione: non esiste una successione $\{x_m\}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $\{f(x_m)\}$ è limitata e $\nabla f(x_m) \to 0$. Questa condizione è soddisfatta dall'esempio al Fatto 2.

Poiché f è coercitiva, gli $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sono equilimitati, ovvero $s_m \subseteq B_M(0)$ per ogni m e per un opportuno $M > 0$.

Definiamo
$$\overline{s} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} s_l}.$$
Poiché $\overline{s}$ è un'intersezione di chiusi, abbiamo che $\overline{s}$ è chiuso. Poiché $\overline{s}$ è un'intersezione di chiusi equilimitati, abbiamo anche che $\overline{s}$ è limitato. Quindi $\overline{s}$ è compatto.

Inoltre $\overline{s}$ è un'intersezione di connessi descrescenti, quindi $\overline{s}$ è connesso.

Poiché $x_1, x_2 \in s_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ abbiamo che $x_1, x_2 \in \overline{s}$ e quindi $\overline{s} \in S$. Dunque
$$\beta = \inf_{s\in S}\{\max_{x\in S} f(x)\} \leq \max_{x\in\overline{s}} f(x).$$
D'altra parte, poiché $\overline{s}$ è compatto, $\exists \overline{x} \in \overline{s}$ tale che $f(\overline{x}) = \max_{x\in\overline{s}} f(x)$.
$$\overline{x} \in \overline{s} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} s_l}$$
significa che $\forall m \in \mathbb{N}$ $\overline{x} \in \overline{\bigcup_{l\geq m} s_l}$, e quindi $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists x_m \in \bigcup_{l\geq m} s_l$ tale che $||x_m - \overline{x}|| \leq \frac{1}{m}$, cioè $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists l_m \geq m$ e $\exists x_m \in s_{l_m}$ tali che $||x_m - \overline{x}|| \leq \frac{1}{m}$. Notiamo che $x_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$ e che $l_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Quindi
$$\beta \leq \max_{x\in\overline{s}} f(x) = f(\overline{x}) = \lim_{m\to+\infty}\{\max_{x\in s_{l_m}} f(x)\} = \beta.$$
Di conseguenza
$$\max_{x\in\overline{s}} f(x) = \beta.$$
Inoltre, poiché $x_1, x_2 \in \overline{s}$ sono punti di minimo stretto, abbiamo che $f(x_1), f(x_2) < \beta$.

Consideriamo l'insieme $K = \{x \in \overline{s} : f(x) = \beta\} \neq \varnothing$. K è compatto; in particolare $x_1, x_2 \notin K$.

Supponiamo ora per assurdo che $\nabla f(x) \neq 0$ $\forall x \in K$. Poiché K è compatto, abbiamo che $\exists \delta > 0$ tale che $|\nabla f(x)| \geq \delta$ $\forall x \in K$.

Sia $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in K : ||x - y|| \leq \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$ e tale che si ha che $|\nabla f(x)| \geq \frac{\delta}{2}$ $\forall x \in U_\varepsilon$ e che $x_1, x_2 \notin U_\varepsilon$.

Consideriamo $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ tale che $0 \leq \eta(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e che $\mathrm{supp}\eta \subseteq U_\varepsilon$[5] e $\eta(x) = 1$ $\forall x \in K$.

[5]Il *supporto* di una funzione $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ è definito come
$$\mathrm{supp}\eta = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \eta(x) > 0\}}.$$

Consideriamo $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ tale che $\phi(x,t) = x - t\eta(x)\nabla f(x)$. Se $x \notin \mathrm{supp}\eta$, allora $\phi(x,t) = x$. Inoltre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi(x,t))_{|t=0} = \nabla f(\phi(x,t)) \cdot (-\eta(x)\nabla f(x))_{|t=0} = -\eta(x)|\nabla f(x)|^2.$$

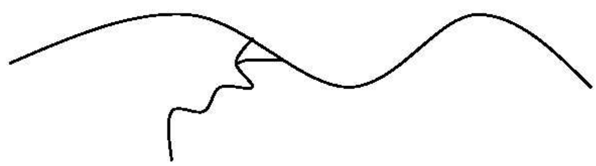
Se $x \in U_\varepsilon$ (in particolare $x \in \mathrm{supp}\eta$) abbiamo che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi(x,0)) \leq -\eta(x)\frac{\delta^2}{4}.$$

Per continuità e compattezza, $\exists T > 0$ tale che $\forall (x,t) \in \mathrm{supp}\eta \times [0,T]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi(x,t)) \leq -\eta(x)\frac{\delta^2}{8}.$$

D'altra parte, se $x \notin \mathrm{supp}\eta$, allora $\phi(x,t) = x$, quindi $\frac{\mathrm{d}\phi(x,t)}{\mathrm{d}t} = 0$ e la formula resta valida.



L'idea ora è quella di deformare $\overline{s}$ e ottenere un assurdo (vedi esempio in figura). Definiamo $s_T = \{\phi(x,T) : x \in \overline{s}\}$. Notiamo che s_T è compatto e connesso; inoltre contiene x_1 e x_2, poiché $x_1, x_2 \notin \mathrm{supp}\eta$ e $x_1 = \phi(x_1,T)$, $x_2 = \phi(x_2,T)$. Quindi $s_T \in S$.

Se $x \in \overline{s}$,

$$f(\phi(x,T)) = f(\phi(x,0)) + \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi(x,t))\mathrm{d}t \leq f(x) - \eta(x)T\frac{\delta^2}{8}.$$

Se $x \notin K$ allora $f(\phi(x,T)) \leq f(x) < \beta$, perché $f(x) < \beta$. Se $x \in K$ allora $f(\phi(x,T)) = \beta - T\frac{\delta^2}{8} < \beta$, perché $f(x) = \beta$.

Quindi, $\forall x \in s_T$, $f(x) < \beta$, e poiché s_T è compatto, abbiamo che $\max_{x \in s_T} f(x) < \beta$. Ma questo è assurdo, quindi $\exists \tilde{x} \in K$ tale che $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ e diverso da x_1, x_2, poiché $x_1, x_2 \notin K$. Infine, se gli $\tilde{x}$ fossero tutti minimi, allora $\tilde{K} = \{\tilde{x} \in K : \nabla f(\tilde{x}) = 0\} = \{x \in \overline{s} : f(x) = \beta, \nabla f(x) = 0\} \neq \varnothing$ sarebbe contemporaneamente un aperto (per la continuità di f e di ∇f) e un chiuso di $\overline{s}$. Quindi, essendo $\overline{s}$ connesso, dovrebbe coincidere con $\overline{s}$, ma questo è assurdo perché $f(x_1), f(x_2) < \beta$. $\square$