Diario del Corso di Calcolo delle Variazioni

Corso di Laurea: Matematica
Docente: Sisto Baldo

Lezione del 17/9/2007 (3 ore): Abbiamo cominciato la lezione con una breve presentazione storica della "nascita" del Calcolo delle Variazioni: la sfida lanciata da Johann Bernoulli alla comunità matematica nel 1696, in cui si chiedeva di trovare la *brachistocrona*, cioè la curva lungo la quale un punto materiale scende da un punto A ad un punto B, situato sullo stesso piano verticale e ad una quota inferiore, nel minor tempo possibile.

In realtà, vedremo anche esempi di problemi variazionali più "antichi", come il problema di Didone...Ma è tutto sommato giusto far risalire il Calcolo delle Variazioni ai Bernoulli, perché è grazie al calcolo differenziale e integrale di Newton e Leibniz che è stato possibile trovare un approccio unificato a questo tipo di problemi!

Con semplici considerazioni fisiche (ed una piccola perdita di generalità, solo apparente, che consiste nel supporre che la brachistocrona sia una funzione di x), abbiamo ridotto il problema di J.Bernoulli al seguente: dato un punto $B = (x_1, y_1)$ nel piano cartesiano, con $x_1 > 0$, $y_1 < 0$, trovare la funzione $u \in \mathcal{C}^1([0, x_1])$ che minimizza la quantità $F(u) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1-(u'(x))^2}{u(x)}}\, dx$ tra tutte le funzioni di classe C^1 tali che $u(0) = 0$, $u(x_1) = y_1$. In questa formulazione, il funzionale $F(u)$ è proprio il tempo di "caduta" lungo il grafico della funzione u (moltiplicato per la quantità costante $\sqrt{2g}$).

Il problema della brachistocrona è un esempio (in verità piuttosto incasinato...vedremo che ci sono non poche complicazioni!) del seguente problema standard del Calcolo delle Variazioni:

PROBLEMA STANDARD DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI: Siano dati una funzione

$$\begin{array}{rcl} f : [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,u,p) & \mapsto & f(x,u,p) \end{array}$$

(che supporremo regolare quanto basta: preciseremo in seguito!) e due numeri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Definiamo la seguente quantità ("funzionale"), dipendente da una funzione* $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$*:*

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx.$$

Si trovi, se esiste,

$$\min\Big\{F(u):\ u\in\mathcal{C}^1([a,b]),\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta\Big\}.$$

Come affrontare il nostro problema? In dimensione finita, quando vogliamo minimizzare una funzione, andiamo a vedere in quali punti si annulla la derivata (più precisamente il gradiente)... Nel nostro caso, una condizione necessaria di minimalità (nel caso regolare) è data dall'annullarsi di certe derivate direzionali.

Cominciamo con l'osservare che l'insieme delle funzioni ammissibili del nostro problema standard,

$$\{u\in C^1([a,b]):\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\}$$

è un sottospazio affine dello spazio vettoriale $C^1([a,b])$: se u_0 è una fissata funzione ammissibile, tutte le altre is ottengono sommandoci gli elementi dello spazio vettoriale

$$\mathcal{C}^1_0([a,b])=\{u\in\mathcal{C}^1([a,b]):\ u(a)=u(b)=0\}.$$

In particolare, una funzione ammissibile $\overline{u}$ realizza il minimo nel nostro problema (in gergo si chiama un "estremante") se e solo se $F(\overline{u})\le F(\overline{u}+\phi)$ per ogni $\phi\in\mathcal{C}^1_0([a,b])$.

Supponiamo ora che $f\in\mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, e sia $\overline{u}$ una funzione minimizzante (un estremante). Seguendo un'idea che può essere fatta risalire a Jakob Bernoulli (fratello di Johann), poi perfezionata da Eulero e da Lagrange, procediamo nel modo seguente: fissiamo $\phi\in\mathcal{C}^1_0([a,b])$, e sia $\varepsilon\in\mathbf{R}$. Allora le funzioni $\overline{u}+\varepsilon\phi$ sono tutte ammissibili e, grazie alla minimalità di $\overline{u}$, la funzione di una variabile $g(\varepsilon)=F(\overline{u}+\varepsilon\phi)$ ha un minimo assoluto per $\varepsilon=0$.

Grazie al teorema di derivazione sotto il segno di integrale, che già conoscete (e che, ad ogni buon conto, riprenderemo tra un attimo), la funzione $g(\varepsilon)$ è di classe $\mathcal{C}^1$, per cui deve essere $g'(0)=0$: facendo il conto si ottiene

$$g'(0)=\int_a^b\{\frac{\partial f}{\partial y}(x,u(x),u'(x))\phi(x)+\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x))\phi'(x)\}\,dx.$$

Secondo una notazione dovuta a Lagrange, si usa indicare

$$g'(0)=\delta F(\overline{u};\phi),$$

che si legge *variazione prima* del funzionale F, nel punto $\overline{u}$ ed in direzione ϕ: può proprio essere interpretata come una derivata direzionale del funzionale F nella direzione della retta passante per $\overline{u}$ e in direzione ϕ.

La condizione (necessaria) di minimalità che abbiamo trovato è

$$(*)\ \delta F(\overline{u},\phi) := \\ \int_a^b \{\frac{\partial f}{\partial y}(x,u(x),u'(x))\phi(x) + \frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x))\phi'(x)\}\ dx = 0\ \forall\phi\in\mathcal{C}_0^1([a,b])...$$

cioè la variazione prima deve annullarsi in *tutte* le direzioni ammissibili! Questa condizione è nota come *equazione di Eulero-Lagrange in forma debole.*

Se poi $f \in \mathcal{C}^2$ e $\overline{u} \in \mathcal{C}^2([a,b])$ (questa seconda ipotesi è piuttosto pesante, in quanto a priori non abbiamo informazioni su questa maggiore regolarità di $\overline{u}$...), possiamo integrare per parti il secondo termine nell'integrale che esprime la variazione prima, ottenendo

$$\int_a^b \{\frac{\partial f}{\partial y}(x,u(x),u'(x)) - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x)))\}\phi(x)\ dx = 0\ \forall\phi\in\mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Grazie al seguente *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*, questa condizione equivale a dire che un estremante $\mathcal{C}^2$ deve soddisfare la seguente *equazione di Eulero-Lagrange*:

$$(**)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,u(x),u'(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}(x,u(x),u'(x))\right).$$

LEMMA (fondamentale del Calcolo delle Variazioni): Sia $v \in \mathcal{C}^0([a,b])$ una funzione tale che

$$\int_a^b v(x)\phi(x)\ dx = 0 \quad \forall\phi\in\mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Allora $v(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Vedremo la dimostrazione tra poco.

Intanto, val la pena di osservare che non è affatto detto che una funzione ammissibile che soddifa l'equazione di Eulero (o l'equazione di Eulero debole) sia un minimo del nostro problema (estremante): anche in dimensione infinita, un punto critico non è necessariamente un punto di minimo!

In gergo, le soluzioni dell'equazione di Eulero si dicono *estremali*, mentre le soluzioni dell'equazione di Eulero debole si dicono (guarda un po'...) *estremali deboli.*

In generale, non è affatto facile dimostrare che un dato funzionale ammetta estremali regolari che soddisfano le condizioni al contorno: queste ultime *non* sono condizioni iniziali alla Cauchy, per cui gli usuali teoremi di esistenza e unicità non si possono applicare.

Viceversa, vedremo che se f soddisfa certe condizioni di convessità, allora un eventuale estremale regolare è certamente un punto di minimo del nostro problema!

Dimostriamo il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che $v(x_0) \neq 0$. Per fissare le idee, supponiamo pure che $v(x_0) > 0$, altrimenti le modifiche sono ovvie.

Grazie alla continuità di v, esiste $\delta > 0$ tale che $v(x) > v(x_0)/2$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Sia ora ϕ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty([a, b])$, non negativa e tale che $\phi(x) = 0$ in $[a, b] \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\phi(x) = 1$ in $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$. Si ha chiaramente $\int_a^b v(x)\phi(x)\, dx \geq \delta v(x_0)/2$, contro l'ipotesi.

Dunque $v(x) = 0$ in (a, b). Per continuità, deve essere anche $v(a) = v(b) = 0$. Q.E.D.

VI ho anche promesso/minacciato una dimostrazione del teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

TEOREMA (di derivazione sotto il segno di integrale): Sia $g : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ *una funzione di classe* C^1, *e definiamo* $G(t) = \int_a^b g(x, t)\, dx$. *Allora* $G \in \mathcal{C}^1([c, d])$ *e*

$$G'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\, dx.$$

DIM.: Sia $t_0 \in [c, d]$, e consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{G(t_0 + h) - G(t_0)}{h} = \int_a^b \frac{g(x, t_0 + h) - g(x, t_0)}{h}\, dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x, t_0 + \theta(x)h)\, dx.$$

Nell'ultima uguaglianza si è usato il teorema di Lagrange (nella variabile t a x fissato), e $\theta(x)$ è un opportuno numero compreso tra 0 e 1 la cui esistenza è assicurata da quel teorema.

Siccome la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial t}$ è limitata (essendo continua su un compatto!), le funzioni integrande nell'ultima espressione sono limitate in modulo da una costante che non dipende da h. Poichè inoltre

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, t_0 + \theta(x)h) \to \frac{\partial g}{\partial t}(x, t_0) \quad \textit{per } h \to 0,$$

il teorema della convergenza dominata ci permette di concludere. Q.E.D.

In quali casi possiamo essere sicuri che una soluzione dell'Equazione di Eulero sia un minimo del nostro problema variazionale? E inoltre, è possibile ottenere risultati di unicità?

Vi ho accennato che questo è possibile se si fanno opportune ipotesi di convessità del funzionale: in fondo, per una funzione convessa di una variabile è vero che ogni punto critico è di minimo. E, per contro, una funzione strettamente convessa ha al più un punto critico...

A questo punto, è utile fare un piccolo ripasso sulle funzioni convesse!

Ricordiamo la seguente, fondamentale, definizione:

DEFINIZIONE (Insieme convesso, funzione convessa): Sia V uno spazio vettoriale reale. Un sottinsieme K di V si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in K$, il segmento di retta che unisce x a y è tutto contenuto in K. In formule, deve valere

$$tx + (1-t)y \in K \qquad \forall x, y \in K,\ \forall t \in [0,1].$$

Una funzione $F : V \to \mathbf{R}$ si dice *convessa* se l'epigrafico di F,

$$\mathrm{Epi}(F) = \{(x, y) \in V \times \mathbf{R} : x \in V, y \geq F(x)\}$$

è un sottinsieme convesso di $V \times \mathbf{R}$. Questo è equivalente a chiedere che

$$(*)\ F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y) \qquad \forall x, y \in V,\ t \in [0,1].$$

La funzione F si dice poi *strettamente convessa* se la disuguaglianza sopra è stretta ogni volta che $x \neq y$ e $t \in (0,1)$.

La definizione di convessità si può dare, con le ovvie modifiche, anche per funzioni $F : K \to \mathbf{R}$ il cui dominio sia un sottinsieme *convesso* di V.

Evidentemente, la convessità di una funzione si verifica sulle rette (o sui segmenti contenuti nel dominio K della funzione). Per questo motivo, è importante studiare a fondo le funzioni convesse *di una variabile*! Lo faremo la prossima volta...

Lezione del 18/9/2007 (2 ore): Oggi ci occuperemo di funzioni convesse... Prima di farlo, diamo però un esempio di problema variazionale che non ammette minimo:

ESEMPIO (di problema variazionale che non ammette minimo): Si consideri il funzionale $F(u) = \int_0^1 [(1-(u'(x))^2)^2 + (u(x))^2]\, dx$. Allora l'estremo inferiore di F su $\mathcal{C}_0^1([0,1])$ vale 0, ma non esiste alcuna funzione in tale insieme su cui il funzionale si annulla: in altre parole, non esiste il minimo di F sull'insieme $\mathcal{C}_0^1([0,1])$.

Per verificare questa affermazione, osserviamo che $F(u) \geq 0$ e che il secondo addendo del funzionale si annulla solo se $u = 0$. D'altra parte, per la funzione nulla il primo addendo del funzionale vale 1: non esiste alcuna funzione su cui il funzionale vale 0. Rimane da far vedere che esistono funzioni in $\mathcal{C}_0^1$ su cui il funzionale assume valori vicini a 0 quanto si vuole. Consideriamo la seguente funzione lineare a tratti definita su $[0,1]$:

$$v(x) = \begin{cases} x & \textit{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & \textit{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Prolunghiamo v come funzione periodica di periodo 1 definita su tutta la retta reale. Poniamo poi $v_h(x) = \frac{1}{h} v(hx)$. Le funzioni v_h sono $\mathcal{C}^1$ a tratti su $[0,1]$ e valgono 0 agli estremi dell'intervallo. Inoltre, hanno derivata ± 1 ovunque (tranne che nei punti angolosi), e tendono uniformemente a 0. Ne segue subito che $F(v_h) \to 0$.

A rigore, bisogna notare che le funzioni v_h non sono ammissibili perché non sono di classe $\mathcal{C}^1$...ma possono essere facilmente allisciate per ottenere una successione veramente accettabile!

Notiamo anche che il nostro problema variazionale non ammette minimo nonostante la funzione integranda $f(x,u,p) = (1-p^2)^2 + u^2$ sia estremamente regolare (è addirittura un polinomio!). In realtà, la principale "colpa" di questa funzione è di non essere convessa!

Come abbiamo cominciato ad osservare ieri, possiamo invece sperare che la convessità del funzionale sia ...prodiga di condizioni sufficienti di minimo!

Sia dunque $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convessa. Con conti un po' noiosi, ma tutto sommato semplici, abbiamo verificato che la disuguaglianza di convessità $(*)$ *si inverte* se $t < 0$ o $t > 1$.

Questo ha un'importante conseguenza: se F è derivabile in x_0, allora si ha

$$(**) F(x) \geq F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

per ogni x nel dominio di F: il grafico di F è tutto al di sopra della retta tangente in x_0. Per mostrarlo, supponiamo per fissare le idee che sia $x > x_0$, e prendiamo $h > 0$ abbastanza piccolo in modo che $x_0 < x_0 + h < x$. Allora, per la disuguaglianza di convessità "invertita" si ha

$$F(x) \geq F(x_0) + \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ha la disuguaglianza voluta. Se poi $x < x_0$, si procede in modo analogo.

Se F è derivabile in tutto il suo dominio, la sua convessità è in realtà *equivalente* alla validità di $(**)$ per ogni x, x_0:

PROPOSIZIONE: Sia $F : I \to \mathbf{R}$ *una funzione derivabile (I intervallo di* $\mathbf{R}$*). Allora* F *è convessa se e solo se vale la disuguaglianza* $(**)$ *per ogni* $x_0, x \in I$.

DIM.: Abbiamo appena dimostrato che se F è convessa e derivabile, allora vale $(**)$.

Viceversa, supponiamo che valga $(**)$ per ogni x, x_0: è un semplice esercizio verificare che questo implica che $F'(x)$ è una funzione crescente (Si prendano $x_1, x_2 \in I$ e si applichi due volte la $(**)$, dapprima con $x_0 = x_1$ e $x = x_2$, poi invertendo i ruoli. Si sommino le due disuguaglianze ottenute...[1]).

A questo punto, siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$: vogliamo dimostrare che il grafico di F tra x_1 e x_2 è tutto al di sotto di quello della funzione lineare $g(x) = F(x_1) + \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$. Per il teorema di Lagrange, esiste $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $F'(\overline{x}) = \frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$ (che è poi la derivata costante di $g(x)$). Dalla crescenza di F' segue che $F'(x) \leq g'(x)$ in $(x_1, \overline{x}]$. Poiché $F(x_1) = g(x_1)$, se ne deduce che $F(x) \leq g(x)$ in $(x_1, \overline{x}]$.

Analogamente, $F'(x) \geq g'(x)$ in $[\overline{x}, x_2]$ da cui, siccome $F(x_2) = g(x_2)$, $F(x) \leq g(x)$ anche in $[\overline{x}, x_2]$. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Ripercorrendo le linee della nostra dimostrazione, si vede facilmente che F è strettamente convessa se e solo se la disuguaglianza $(**)$ è stretta quando $x \neq x_0$, per ogni x, x_0.

Torniamo al caso generale di una funzione $F : K \to \mathbf{R}$, con K sottinsieme convesso di uno spazio vettoriale reale V. Diamo una definizione di derivata direzionale per la funzione F:

DEFINIZIONE: Sia $y \in K$, $v \in V$ tale che $y + hv \in K$ per tutti gli h sufficientemente piccoli[2]. Definiamo allora

$$\delta F(y; v) := \lim_{h \to 0} \frac{F(y + hv) - F(y)}{h},$$

se il limite esiste finito[3]. La quantità $\delta F(y; v)$ è una specie di derivata direzionale di F, calcolata nel punto y ed in direzione v.

[1] Anche il viceversa è vero: se F è derivabile e F' è crescente, allora F è convessa (esercizio!). Conseguenza interessante: una funzione derivabile due volte è convessa se e solo se la derivata seconda è non negativa.

[2] O, almeno, per tutti gli h *positivi* o per tutti gli h *negativi* sufficientemente piccoli.

[3] Ovviamente, il limite diventa un limite destro o un limite sinistro se succede quanto detto nella nota precedente...

OSSERVAZIONE/ESEMPIO: La seguente osservazione può essere ovvia, ma è di fondamentale importanza per noi, perché non dobbiamo dimenticare che il nostro scopo è studiare i minimi di funzionali integrali!

Sia $K = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \ u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta\}$,

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

con $f : [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ funzione data di classe $\mathcal{C}^1$. Allora la derivata direzionale $\delta F(u,\phi)$ è definita per ogni $u \in K$ e per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$, e coincide con la variazione prima di Lagrange vista la volta scorsa:

$$\delta F(u,\phi) = \int_a^b [f_u(x, u(x), u'(x))\phi(x) + f_p(x, u(x), u'(x))\phi'(x)]\, dx.$$

Per le funzioni $F : K \to \mathbf{R}$ derivabili direzionalmente, la convessità si caratterizza in un modo simile alla disuguaglianza (**) vista sopra:

PROPOSIZIONE: Sia K un sottinsieme convesso di uno spazio vettoriale reale V, $F : K \to \mathbf{R}$ una funzione tale che la derivata direzionale $\delta F(y;v)$ esiste per ogni $y \in K$ e per ogni v tale che $y + v \in K$. Allora F è convessa se e soltanto se

$$(***) \ F(y+v) \geq F(y) + \delta F(y;v) \quad \forall y \in K, \forall v \in V \ t.c. \ y+v \in K.$$

F è poi strettamente convessa se e solo se l'uguaglianza si ha solo per $v = 0$.

DIM.: Abbiamo già osservato che è sufficiente verificare la convessità sui segmenti in K. La convessità di F è cioè equivalente a quella delle funzioni di una variabile $f(t) := F(y_0 + tv_0)$ per ogni $y_0 \in K$, $v_0 \in V$ tale che $y_0 + v_0 \in K$ (queste funzioni sono definite su intervalli di $\mathbf{R}$).

Fissati y_0, v_0, notiamo che f è derivabile nel suo dominio e

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(y_0 + (t+h)v_0) - F(y_0 + tv_0)}{h} = \delta F(y_0 + tv_0; v_0).$$

La (**) per la funzione f diventa, per $t, \bar{t}$ nel dominio di f:

$$f(t) \geq f'(\bar{t})(t - \bar{t}) + f(\bar{t})$$

che in termini di F diventa

$$\begin{aligned} F(y_0 + tv) \geq \quad & \delta F(y_0 + \bar{t}v_0; v_0)(t - \bar{t}) + F(y_0 + \bar{t}v) = \\ & \frac{1}{t - \bar{t}} \delta F(y_0 + \bar{t}v_0; (t - \bar{t})v) \cdot (t - \bar{t}) + F(y_0 + \bar{t}v_0), \end{aligned}$$

che è esattamente la $(***)$ con $y = y_0 + \bar{t}v_0$, $v = (t - \bar{t})v_0$. Dunque, la validità "a tappeto" della $(***)$ è equivalente alla validità della (**) su ogni retta.

Queste considerazioni si aggiustano facilmente per esaminare la stretta convessità. Q.E.D.

Se una funzione derivabile direzionalmente è convessa, i punti critici sono punti di minimo assoluto. Se poi è strettamente convessa, c'è al più un unico punto di minimo:

TEOREMA: Sia K un sottinsieme convesso di uno spazio vettoriale reale V, $F : K \to \mathbf{R}$ una funzione tale che la derivata direzionale $\delta F(y; v)$ esiste per ogni $y \in K$ e per ogni v tale che $y + v \in K$. Se F è convessa e $\overline{y} \in K$ è tale che

$$\delta F(\overline{y}, v) = 0 \qquad \forall v \in V \ t.c. \ \overline{y} + v \in K.$$

Allora $\overline{y}$ è un punto di minimo assoluto per F in K. Se poi F è strettamente convessa, non ci possono essere altri punti di minimo assoluto.

DIM.: Supponiamo dunque che tutte le derivate direzionali si annullino in $\overline{y}$ e fissiamo $y \in K$: dobbiamo mostrare che $F(y) \geq F(\overline{y})$. Ma usando la disuguaglianza di convessità (***) con $y = \overline{y}$ e $v = y - \overline{y}$ otteniamo proprio quel che vogliamo:

$$F(y) \geq F(\overline{y}) + \delta F(\overline{y}, y - \overline{y}) = F(\overline{y}).$$

Se poi F è strettamente convessa, l'ultima disuguaglianza diventa stretta non appena $y \neq \overline{y}$: ogni punto di K diverso da $\overline{y}$ non è di minimo assoluto! Q.E.D.

Lezione del 21/9/2007 (3 ore):

ESEMPIO: Vediamiamo ora una famiglia di funzionali *non* convessi, in cui l'equazione di Eulero ha sempre almeno una soluzione ammissibile (mentre per certi valori del parametro ne ha infinite). Vedremo però che, a seconda dei valori del parametro ν, possiamo avere 1, infinite o nessuna soluzione del problema variazionale.

La famiglia di funzionali che vogliamo considerare è

$$F(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \nu^2 (u(x))^2] \, dx,$$

con ν parametro reale. Siamo interessati a trovare, se esistono, i punti di minimo di u in $\mathcal{C}_0^1([0, \pi])$.

L'equazione di Eulero-Lagrange è $u''(x) + \nu^2 u(x) = 0$, la cui soluzione generale è $u(x) = a\cos\nu x + b\sin\nu x$. Andando ad imporre le condizioni al bordo, si trova sempre la soluzione "banale" $u(x) = 0$. Se ν è intero, anche le funzioni $u(x) = c\sin\nu x$ sono soluzioni (per ogni $c \in \mathbf{R}$), altrimenti c'è solo la soluzione banale.

Mostreremo che per $\nu^2 < 1$, la soluzione $u(x) = 0$ è l'unico punto di minimo del funzionale. Per $\nu^2 = 1$, le infinite funzioni del tipo $u(x) = c\sin x$ sono tutti e soli i minimi assoluti, mentre per $\nu^2 > 1$ il funzionale non è nemmeno inferiormente limitato: le soluzioni dell'equazione di Eulero non sono minimi!

Per dimostrare le nostre affermazioni, abbiamo bisogno di una disuguaglianza che riincontreremo (in un contesto leggermente diverso) anche nel seguito: la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.

TEOREMA (Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger): Sia $u \in \mathcal{C}_0^1([0,\pi])$. *Allora si ha*

$$\int_0^\pi (u(x))^2\, dx \le \int_0^\pi (u'(x))^2\, dx,$$

con l'uguaglianza se e solo se $u(x) = c\sin x$.

DIM.: Estendiamo u ad una funzione dispari definita anche in $[-\pi, 0)$, ed estendiamola poi ulteriormente ad una funzione 2π-periodica definita su tutta la retta reale. La funzione u rimane di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti grazie alle condizioni al contorno. Una tale funzione e la sua derivata hanno la serie di Fourier che converge in L^2: possiamo scrivere

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx,$$

con $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\sin nx\, dx$ e si ha (identità di Parseval):

$$\int_0^\pi (u(x))^2\, dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \quad \int_0^\pi (u'(x))^2\, dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2,$$

da cui segue subito l'asserto confrontando le due serie. Q.E.D.

Dalla disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger segue subito il nostro asserto sulla famiglia di funzionali dell'esempio: se $\nu^2 \le 1$ il funzionale è non negativo e vale 0 se e soltanto se $u(x) = 0$ oppure (nel solo caso $\nu^2 = 1$) quando $u(x) = c\sin x$.

Se poi $\nu^2 > 1$, per verificare che il funzionale non è inferiormente limitato basta calcolarlo sulle funznioni $u(x) = c\sin x$. Si potrebbe far vedere che, in questo caso, le soluzioni dell'equazione di Eulero sono punti di sella del funzionale.

Come vi immaginerete, vogliamo applicare i "fantastici" risultati astratti della volta scorsa a problemi di calcolo delle variazioni. Per farlo, ci serve una classe abbastanza ampia di funzionali convessi: eccoli!

OSSERVAZIONE: Il funzionale integrale

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx,$$

con $f \in \mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ è certamente convesso (risp., strettamente convesso) su $\mathcal{C}^1([a,b])$ se sappiamo che per ogni $x \in [a,b]$ la funzione $(u,p) \mapsto f(x,u,p)$ è una funzione convessa (risp., strettamente convessa) di due variabili. Otteniamo così il seguente, fondamentale

COROLLARIO: Sia $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $F : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathbf{R}$ il funzionale

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx.$$

Supponiamo che per ogni $x \in [a,b]$ la funzione di due variabili $(u,p) \mapsto f(x,u,p)$ sia convessa, e consideriamo l'insieme ammissibile

$$K = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$$

(con α, β fissati numeri reali). Allora $\overline{u} \in K$ è un punto di minimo del funzionale F in K se e soltanto se $\delta F(\overline{u}, \phi) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{C}^1_0([a,b])$, cioè se e soltanto se $\overline{u}$ soddisfa l'equazione di Eulero debole. Se poi $\overline{u} \in K \cap \mathcal{C}^2([a,b])$, allora $\overline{u}$ è un punto di minimo se e soltanto se soddisfa l'equazione di Eulero

$$f_u(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) = \frac{d}{dx}[f_p(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x))].$$

Se infine f è strettamente convessa nelle variabili (u,p) per ogni fissato x, l'evuentuale punto di minimo è unico.

Si noti che, nel corollario precedente, la sufficienza dell'equazione di Eulero debole segue dal risultato sulle funzioni convesse, mentre la necessità l'abbiamo ottenuta già nella prima lezione! Per avere la stretta convessità del funzionale, l'ipotesi che $f(x,u,p)$ sia strettamente convessa nelle ultime due variabili può essere indebolita: grazie alla particolare forma del funzionale variazione prima, basta che nella condizione di convessità

$$f(x, u+v, p+q) \geq f(x,u,p) + f_u(x,u,p)v + f_p(x,u,p)q$$

l'uguale valga solo se $v = 0$ *oppure* $q = 0$... Per esempio, la somma di una funzione strettamente convessa in p e di una convessa ma non strettamente convessa in u produce un funzionale integrale strettamente convesso!

Abbiamo visto con un paio di esempi che, però, il funzionale può essere convesso (risp., strettamente convesso) sull'insieme delle funzioni ammissibili anche senza la convessità dell'integranda: i funzionali

$$F(u) = \int_0^1 u(x)u'(x)\, dx$$
$$G(y) = \int_0^1 [(u(x))^{3/2} + (u(x))^2 u'(x)]\, dx$$

sono rispettivamente convesso (costante) e strettamente convesso sullo spazio delle funzioni ammissibili, pur non essendo convessa l'integranda.

ESEMPIO (Brachistocrona): Torniamo al funzionale della brachistocrona. Abbiamo visto che occorre minimizzare

$$F(u) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}}\, dx$$

tra tutte le funzioni $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ con $u(0) = 0$, $u(x_1) = y_1$.

Purtroppo la funzione $(u, p) \mapsto \sqrt{\frac{1+p^2}{p}}$ non è convessa (per esempio, si vede subito che non lo è la restrizione alla retta $u = p$). Se però restringiamo le curve ammissibili a quelle che sono grafico di una funzione di y (cioè a quelle del tipo $x = u(y)$), con le stesse considerazioni fisiche della volta scorsa arriviamo al funzionale:

$$F(u) = \int_0^{y_1} \sqrt{\frac{1 + (u'(y))^2}{y}}\, dy,$$

da minimizzare tra tutte le funzioni $u \in \mathcal{C}^1([0, y_1])$ con $u(0) = 0$, $u(y_1) = x_1$. Per ogni fissato y, la funzione

$$y \mapsto \sqrt{\frac{1 + p^2}{y}}$$

è strettamente convessa: un'(eventuale) soluzione dell'equazione di Eulero è dunque l'unica soluzione del problema della brachistocrona!

L'equazione di Eulero è

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{u'(y)}{\sqrt{y(1 + (u'(y)^2)}}\right) = 0,$$

da cui si ricava con semplici conti

$$(u'(y))^2 = \frac{y}{c^2 - y}.$$

Quest'equazione si integra facilmente con la sostituzione $u/(c^2 - u) = z^2$, ottenendo

$$u(y) = -\sqrt{y(c^2 - y)} + c^2 \arctan \sqrt{\frac{y}{c^2 - y}}.$$

Questa funzione soddisfa evidentemente la condizione $u(0) = 0$...e in certi casi possiamo sperare che si riesca a soddisfare anche l'altra.

La funzione trovata rappresenta un arco di cicloide...anche se non è così immediato riconoscerlo! A rigore, in questo caso, la funzione integranda del funzionale non è di classe $\mathcal{C}^1$ perché c'è un denominatore che si annulla per $y = 0$. Occorre quindi verificare se è applicabile il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Fortunatamente, si tratta di un semplice esercizio di applicazione del teorema della convergenza dominata.

Per capire in quali casi riusciamo a soddisfare le condizioni al contorno, conviene studiare meglio le proprietà geometriche della cicloide...e verificare che la soluzione che abbiamo trovato è proprio un arco di questa curva!

La cicloide è la curva descritta da un punto situato su un cerchio che rotola senza strisciare sull'asse delle x. Se il punto parte nell'origine e facciamo rotolare il cerchio nel senso delle x positive, abbiamo visto che le equazioni parametriche della cicloide sono

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos\theta) = 2r\sin^2\theta \end{cases}$$

dove θ è l'angolo di cui "è ruotato" il cerchio e r rappresenta il raggio. Sostituendo nell'espressione trovata sopra per u (con $r = c^2/2$), si vede subito che il grafico di u è una cicloide.

Purtroppo, se è vero che esiste sempre un arco di cicloide che unisce $(0, 0)$ a (x_1, y_1), la discussione della volta scorsa ci ha fornito la dimostrazione che questa curva è la brachistocrona solo quando essa è un grafico di una funzione di y, cioè solo se non scende al di sotto del punto finale.

È però un semplice esercizio verificare che la cicloide risolve l'equazione di Eulero del primo funzionale che abbiamo scritto (quello non convesso). A questo scopo, anziché usare la forma generale dell'equazione di Eulero, conviene osservare che l'integranda $f(u, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{u}}$ non dipende esplicitamente da x. Per funzionali di questo tipo l'equazione di Eulero (supponendo al solito che tutto, soluzione compresa, sia di classe $\mathcal{C}^2$), è equivalente a cercare soluzioni non costanti dell'*equazione di du Bois-Reymond*

$$f(u, u'(x)) - u'(x) f_p(u, u'(x)) = cost.$$

Infatti, derivando il primo membro di quest'ultima equazione si ottiene

$$f_u(u,u')u' + f_p(u,u')u'' - u'' f_p(u,u') - u'(f_p(u,u'))',$$

espressione che si annulla se e solo se è soddisfatta l'equazione di Eulero-Lagrange.

Lezione del 24/9/2007 (3 ore): Risolvendo l'equazione di du Bois-Reymond nel caso del funzionale della brachistocrona, ritroviamo che l'unica soluzione è l'arco di cicloide con cuspide in $x = 0$ che unisce l'origine al punto (x_1, y_1). Purtroppo, non avendo la convessità del funzionale non siamo legittimati a dire che questa soluzione è un minimo. Si potrebbe farlo usando la tecnica più raffinata dei *campi di Weierstrass*, che probabilmente non faremo in tempo a studiare in questo corso, oppure con un trucco astuto: se poniamo $u = v^2/2$, il funzionale diventa equivalente al seguente:

$$\widetilde{F}(u) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1}{v^2} + (v')^2}\, dx,$$

la cui integranda $(v,p) \mapsto \sqrt{\frac{1}{v^2} + p^2}$ è strettamente convessa[4]. È facile vedere che le cicloidi che risolvono l'equazione di Eulero per il funzionale originale corrispondono, attraverso il cambio di variabili scritto sopra, a soluzioni del nuovo problema di minimo convesso!

ESERCIZIO: Verifichiamo anche la proprietà di tautocronia dell'arco di cicloide: se $0 \leq \overline{\theta} \leq \pi$, il tempo impiegato da un punto materiale per cadere dal punto $(x(\overline{\theta}), y(\overline{\theta}))$ nel punto più basso dell'arco di cicloide (lungo l'arco stesso) non dipende da $\overline{\theta}$!

Infatti, a meno di un fattore moltiplicativo costante, il tempo di caduta è dato dall'integrale

$$\int_{\overline{\theta}}^{\pi} \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos\overline{\theta} - \cos\theta}}\, d\theta = \pi.$$

Una classe importante di problemi variazionali è quella dei *problemi con vincolo isoperimetrico*: vogliamo minimizzare un certo funzionale integrale F tra tutte le funzioni con dato al bordo fissato per le quali un *altro* funzionale G assume valore costante. Questo problema di minimo vincolato assomiglia a quelli che, in dimensione finita, si risolvono con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange! E, infatti, vale un risultato molto simile:

[4]Disgraziatamente occorre fare il contazzo della matrice hessiana!

TEOREMA (dei moltiplicatori di Lagrange): Siano dati due funzionali integrali

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \qquad G(u) = \int_a^b g(x, u(x), u'(x))\, dx.$$

Sia $\overline{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *una funzione tale che*

$$F(\overline{u}) = \min\{F(u): \ u \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ u(a) = \overline{u}(a),\ u(b) = \overline{u}(b),\ G(u) = G(\overline{u})\}.$$

Supponiamo inoltre che esista $\psi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ *tale che* $\delta G(\overline{u}; \psi) \neq 0$. *Allora esiste* $\lambda \in \mathbf{R}$ *(moltiplicatore di Lagrange) tale che, posto* $\widetilde{F}(u) = F(u) + \lambda G(u)$ *si abbia*

$$\delta \widetilde{F}(\overline{u}, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

DIM.: Data $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$, definiamo la seguente funzione di due variabili (che esiste in un intorno dell'origine):

$$\Phi(s,t) = G(\overline{u} + s\phi + t\psi).$$

Grazie all'espressione della variazione prima, si vede subito che Φ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Inoltre si ha ovviamente $\Phi(0,0) = G(\overline{u})$ e $\Phi_t(0,0) = \delta G(\overline{u}; \psi) \neq 0$. Grazie al teorema delle funzioni implicite, possiamo allora trovare un intorno I di 0 (in $\mathbf{R}$) e una funzione regolare $t(s): I \to \mathbf{R}$ tale che $\Phi(s, t(s)) = G(\overline{u})$ per ogni $s \in I$. Abbiamo anche

$$t'(s) = -\frac{\Phi_s(s, t(s))}{\Phi_t(s, t(s))}.$$

In altre parole, per ogni $s \in I$ la funzione $\overline{u} + s\phi + t(s)\psi$ è una funzione ammissibile per il nostro problema isoperimetrico per cui deve essere

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} & F(\overline{u} + s\phi + t(s)\psi) = \\ & \delta F(\overline{u}; \phi) + \delta F(\overline{u}; \psi) t'(s) = \\ & \delta F(\overline{u}; \phi) - \delta F(\overline{u}; \psi) \frac{\delta G(\overline{u}, \phi)}{\delta G(\overline{u}; \psi)}. \end{aligned}$$

La tesi segue allora immediatamente ponendo

$$\lambda = -\frac{\delta F(\overline{u}; \psi)}{\delta G(\overline{u}; \psi)}.$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Con opportune ipotesi di convessità, dal risultato precedente si possono ottenere delle condizioni sufficienti. Per esempio, supponiamo che F, G siano funzionali convessi e che esistano $\overline{u} \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $\lambda > 0$ tali che, posto $\widetilde{F}(u) = F(u) + \lambda G(u)$ si abbia

$$\delta\widetilde{F}(\overline{u}, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Allora sappiamo che $\overline{u}$ minimizza il funzionale $\tilde{F}$ tra tutte le funzioni con lo stesso valore al bordo.

In particolare ed a maggior ragione, potremmo dire che $\overline{u}$ minimizza F tra tutte le funzioni u con lo stesso dato al bordo e con $G(u) = G(\overline{u})$. Se poi *uno* dei due funzionali è strettamente convesso, abbiamo anche l'unicità!

Operativamene, se F e G sono convessi, possiamo procedere cercando le soluzioni dell'equazione di Eulero per $\widetilde{F}$ (con i dati al bordo che ci interessano), e vedere poi se troviamo $\lambda > 0$ in modo che il funzionale G assuma il valore voluto.

ESEMPIO (il problema della catenaria): Vogliamo trovare il profilo di un filo flessibile ed inestensibile, di lunghezza 2ℓ e densità per unità di lunghezza costante, con i due estremi fissati ad altezza 0 e a distanza 2δ l'uno dall'altro. Supponiamo che l'unica forza che agisce sul filo sia la gravità.

Evidentemente, il filo si disporrà in modo da minimizzare l'energia potenziale gravitazionale: se $u(s)$ è la coordinata verticale (la y del filo) in funzione del parametro lunghezza d'arco, tale energia è data da

$$F(u) = \int_0^{2\ell} u(s)\, ds,$$

a meno di una costante moltiplicativa in cui entra la densità del filo e l'accelerazione di gravità. Siccome poi $(x'(s))^2 + (u'(s))^2 = 1$, si ha $x'(s) = \sqrt{1-(u'(s))^2}$ e il vincolo che gli estremi del filo abbiano distanza 2δ diventa

$$G(u) = \int_0^{2\ell} \sqrt{1-(u'(s))^2}\, ds = 2\delta.$$

Consideriamo allora il funzionale (strettamente) convesso

$$\widetilde{F}(u) = F(u) - \lambda G(u).$$

Se troviamo $\lambda > 0$ e una soluzione dell'equazione di Eulero di $\widetilde{F}$ che soddisfi sia le condizioni al contorno $u(0) = u(2\ell) = 0$ che il vincolo isoperimetrico $G(u) = 2\delta$, questa sarà l'unica soluzione del nostro problema variazionale e avremo determinato unicamente la forma del filo!

L'equazione di Eulero è:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda u'(s)}{\sqrt{1-(u'(s))^2}}\right)=1,$$

da cui si ricava con facili passaggi

$$u'(s)=\frac{s+c}{\sqrt{\lambda^2+(s+c)^2}}.$$

Possiamo fare la ragionevole ipotesi fisica che il profilo sia simmetrico rispetto al punto di mezzo $s=\ell$ del filo, dove esso avrà altezza minima: tanto, se riusciamo a risolvere il problema in questo modo, la nostra assunzione sarà giustificata a posteriori!

In tal caso dovremo avere $u'(\ell)=0$, da cui $c=-\ell$. La soluzione sarà data allora da

$$u(s)=\int_0^s \frac{(s-\ell)\,ds}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}=\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}-\sqrt{\lambda^2+\ell^2},$$

purché si riesca a determinare $\lambda>0$ in modo che valga il vincolo isoperimetrico. Questo, grazie all'assunzione di simmetria, diventa

$$\delta=x(\ell)=\int_0^\ell \frac{\lambda\,ds}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}=:g(\lambda).$$

Con il cambio di variabili $(\ell-s)/\lambda=z$ troviamo $g(\lambda)=\lambda\int_0^{\ell/\lambda}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$. Con la regola di l'Hôpital è semplice verificare che

$$\lim_{\lambda\to 0^+} g(\lambda)=0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda)=\delta$$

da cui segue subito che c'è un λ che soddisfa la nostra richiesta.

In realtà, l'integrale che fornisce $x(\ell)$ può essere calcolato anche esplicitamente per sostituzione: si trova

$$x(s)=\delta-\lambda\sinh^{-1}((\ell-s)/\lambda),$$

da cui è facile eliminare s nelle nostre equazioni parametriche e trovare $y(x)=\lambda\cosh((\delta-x)/\lambda)-\sqrt{\lambda^2+\ell^2}$. Insomma, la catenaria è il grafico di una funzione coseno iperbolico!

Lezione del 28/9/2007 (3 ore): Vogliamo affrontare oggi il *problema isoperimetrico* nell'accezione etimologica del termine: il problema di Didone. Lo vogliamo affrontare dapprima con i metodi di calcolo delle variazioni che abbiamo imparato...per poi vedere una trattazione più semplice e completa dovuta a A. Hurwitz.

Il problema di Didone è il seguente: *assegnato il perimetro, trovare la regione di piano di area massima.* Per essere precisi, nella sua formulazione originale il problema è posto in un *semipiano*: come narra Virgilio (Eneide, I-365), i fenici guidati dalla leggendaria regina Didone fuggono dal Libano e arrivano sulle coste dell'attuale Tunisia, ove acquistano dal re del luogo un appezzamento di terreno, "quanto se ne possa circondare con una pelle di toro". L'astuta Didone taglia la pelle di toro in una lunghissima strisciolina...e si trova a dover risolvere il problema che abbiamo enunciato sopra, con il grosso vantaggio di trovarsi sulla costa (per cui parte del perimetro sulla regione può coincidere con la linea della spiaggia, ed è possibile risparmiare un bel po' di corda)! La regina è quindi in grado di circondare una vasta regione semicircolare, nella quale fonda la città di Cartagine.

Proviamo a fare qualche conto per convincerci che Didone abbia fatto roprio la scelta migliore possibile (in altre parole, per convincerci che il semicerchio è la regione di area massima con perimetro assegnato in un semipiano, cosìcome il cerchio è la regione di area massima con perimetro assegnato nel piano.

Cominciamo con un problemino-antipasto molto semplice:
tra tutte le funzioni $u \in \mathcal{C}^1_0([-\delta,\delta])$ tali che la lunghezza del grafico di u sia uguale ad un assegnato numero ℓ, trovare quella che circonda la regione del semipiano superiore di area massima.

Si tratta di minimizzare il funzionale $F(u) = -\int_{-\delta}^{\delta} u(x)\,dx$ (l'area cambiata di segno!) tra tutte le funzioni $u \in \mathcal{C}^1_0([-\delta,\delta])$ che soddisfano il vincolo
$$G(u) = \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx = \ell.$$
Si tratta dunque di trovare i punti critici del funzionale convesso $\widetilde{F}(u) = F(u) + \lambda G(u)$, ammesso che per qualche $\lambda > 0$ se ne trovi che soddisfano il vincolo. Scrivendo l'equazione di Eulero del funzionale $\widetilde{F}$ si trova facilmente
$$u'(x) = \frac{c-x}{\lambda\sqrt{1-\left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2}},$$
da cui $u(x) = \lambda\sqrt{1-\left(\frac{c-x}{\lambda}\right)^2} + k$. Dalla condizione al contorno $u(-\delta) = u(\delta) = 0$ segue $c = 0$, da cui $u(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2-\delta^2}$ (arco di semi-

cerchio), e dobbiamo vedere se è possibile determinare $\lambda > \delta$ (altrimenti la soluzione non sarebbe definita e di classe $\mathcal{C}^1$ in $(-\delta, \delta)$) in modo che $G(u) = \ell$. D'altra parte, si trova che $G(u) = 2\lambda \arcsin(\delta/\lambda) = g(\lambda)$. Evidentemente $g(\lambda)$ è strettamente decrescente e $g(\delta) = \pi\delta$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = 2\delta$: esiste un unico λ per cui la soluzione soddisfa il vincolo a patto che $2\delta < \ell < \pi\delta$...due condizioni dall'evidente significato geometrico!

Evidentemente, non abbiamo risolto *del tutto* il problema isoperimetrico: ci siamo ristretti ai soli sottinsiemi del semipiano che sono bordati da un *grafico* ed hanno come base il segmento $[-\delta, \delta]$. Possiamo però ricavare dalla nostra discussione delle informazioni importanti sulla soluzione del problema completo (sia nel piano che nel semipiano) se *assumiamo che esista un insieme ottimale A di classe $\mathcal{C}^2$*. In questo caso, se prendiamo due punti di ∂A sufficientemente vicini, il tratto di frontiera che li congiunge sarà un grafico sopra la corda (e possiamo anche assumere che il rapporto tra la sua lunghezza e quella della corda sia arbitrariamente vicino a 1: si usi l'uniforme continuità della derivata della parametrizzazione della curva...). Per la discussione precedente, questo tratto di frontiera deve essere un arco di cerchio (altrimenti potremmo sostituirlo, appunto, con un arco di cerchio, facendo aumentare l'area dell'insieme!).

In conclusione, la frontiera dell'insieme ottimale è costituita localmente da archi di cerchio. Siccome due archi di cerchio si possono connettere in modo $\mathcal{C}^2$ se e solo se hanno stesso centro e stesso raggio, la frontiera è globalmente costituita da un arco di cerchio[5]. Dunque, nel piano la soluzione (sempre se esiste ed è di classe $\mathcal{C}^2$) deve essere un cerchio. Nel semipiano è necessaria un'analisi ulteriore: siamo sicuri che il semicerchio sia preferibile ad una regione bordata da archi corrispondenti a porzioni di cerchio che siano più o meno della metà?

Questo è un bell'esercizio di analisi elementare: detto r il raggio del cerchio e θ l'angolo al centro corrispondente all'arco che vogliamo considerare, la lunghezza dell'arco sarà $\ell = r\theta$, mentre l'area del segmento circolare individuato dall'arco è $A = r^2/2(\theta - \sin\theta)$. Dalla lunghezza ricaviamo $r = \ell/\theta$, per cui l'area in funzione di θ è data a meno di un fattore $\ell^2/2$ da

$$g(\theta) = \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^2}.$$

Calcoliamo la derivata:

$$g'(\theta) = \frac{2\sin\theta - \theta(1 + cos\theta)}{\theta^3}.$$

[5]Affinando un pochino questo ragionamento, abbiamo visto che questo è vero anche se assumiamo soltanto che ci sia una soluzione di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti.

Studiando il numeratore $h(\theta) = 2\sin\theta - \theta(1-\cos\theta)$ (si parta dal segno della derivata seconda di h...) si scopre che la derivata g' è positiva per $\theta \in (0,\pi)$, mentre è negativa nell'intervallo complementare: l'area massima è raggiunta quando $\theta = \pi$, cioè quando prendiamo il semicerchio!

OSSERVAZIONE: Come acutamente osservato da Decarli e Vaona, lo stesso risultato si può ottenere con un semplice ragionamento di simmetria. Supponiamo di avere una regione del semipiano superiore di area A, delimitata da un arco di cerchio di lunghezza ℓ. Riflettendo l'insieme attraverso l'asse delle x e prendendo l'unione delle due metà, otteniamo un sottinsieme del piano di area $2A$ e perimetro 2ℓ. Se l'arco di partenza non è un semicerchio, il nuovo insieme non sarà ottimale per il problema isoperimetrico nel piano: possiamo sostituirlo con un cerchio di perimetro 2ℓ ed area maggiore $2A+2\varepsilon$. Prendendo metà di questo cerchio si ottiene un insieme ammissibile per il problema isoperimetrico nel semipiano, di area $A+\varepsilon$ strettamente maggiore di quello di partenza.

Vogliamo ora vedere la dimostrazione trovata da A.Hurwitz all'inizio del '900 della proprietà isoperimetrica del cerchio nel piano. Supponiamo di avere una regione $A \subset \mathbf{R}^2$, bordata da una curva di Jordan $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ che supporremo parametrizzata per lunghezza d'arco e di lunghezza totale 2π (dunque $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$). Dalla formula di Gauss-Green segue che

$$Area(A) = \int_0^{2\pi} x(s)y'(s)\, ds.$$

A meno di una traslazione della curva, possiamo anche supporre che $\int_0^{2\pi} x(s)\, ds = \int_0^{2\pi} y(s)\, ds = 0$.

Per la dimostrazione di Hurwitz ci serve una versione della disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger leggermente diversa da quella che abbiamo già incontrato:

LEMMA (Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger): Sia f una funzione 2π-periodica e di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, tale che $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$. Allora

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2\, dx \le \int_0^{2\pi} (f'(x))^2\, dx,$$

con uguaglianza se e solo se $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

DIM.: La dimostrazione è molto simile a quella già vista: si scrive la serie di Fourier di f e di f', osservando che $a_0 = 0$ grazie all'ipotesi sull'integrale di f.... Q.E.D.

Grazie alla disuguaglianza di Wirtinger, Hurwitz osserva che

$$\int_0^{2\pi} [(x(s) - y'(s))^2 + (x'(s))^2 - x^2(s)]\, ds \geq 0.$$

Sviluppando i conti questa disuguaglianza diventa

$$\int_0^{2\pi} ((x'(s))^2 + (y'(s))^2 - 2x(s)y(s))\, ds \geq 0,$$

da cui (ricordando che la curva è parametrizzata per lunghezza d'arco e la formula per l'area) $2\pi \geq 2\ Area(A)$.

In conclusione, una curva piana di lunghezza 2π borda una regione di piano di area minore o uguale a π. Sfruttando la condizione di uguaglianza in Poincaré-Wirtinger, si vede anche che l'area è uguale a π se e solo se l'insieme è un cerchio di raggio 1: tra tutte le curve di lunghezza 2π, il cerchio di raggio 1 borda la regione di area massima.

In figura, si vede come un film di sapone sia in grado di "trovare" la soluzione del problema isoperimetrico nel piano:

Se facciamo un'omotetia di rapporto r, la lunghezza delle curve viene moltiplicata per r e le aree per r^2. Otteniamo coì facilmente la seguente *disuguaglianza isoperimetrica*: se A è una regione del piano bordata da una curva di Jordan di lungezza ℓ, allora

$$4\pi\ Area(A) \leq \ell^2$$

con uguaglianza se e solo se A è un cerchio di circonferenza ℓ.

Questa disuguaglianza mostra anche che il cerchio risolve il problema *duale*, cioè quello di trovare il sottinsieme del piano di area assegnata e di perimetro minimo. Lo stesso risultato si può ottenere anche con il seguente ragionamento elementare.

Sappiamo già che un dato cerchio A ha area massima tra tutte le figure col suo perimetro. Supponiamo per assurdo che *non risolva il problema duale*, cioè che esista una figura A' con la stessa area di A, ma con perimetro *strettamente minore*. Allora possiamo fare un'omotetia di rapporto maggiore di 1 in modo da ottenere un ulteriore insieme A'' con lo stesso perimetro di A: questa nuova figura avrà evidentemente area maggiore di A, contro l'ipotesi che A risolvesse il problema isoperimetrico! In sostanza, questo ragionamento mostra che saper risolvere il problema isoperimetrico equivale a saper risolvere il problema duale.

Vedremo ancora molti esempi di problemi variazionali interessanti... Ma prima di farlo è il caso di ridare un'occhiata all'equazione di Eulero-Lagrange, sia in forma forte che in forma debole. Siamo sicuri che non abbia più nulla da dirci?

Se ricordate, per passare dalla forma debole alla forma forte dell'equazione, abbiamo avuto bisogno di supporre che i punti critici fossero funzioni di classe $\mathcal{C}^2$....Ma, sorpresa, scopriremo che basta che l'integranda f e l'estremale u siano di classe $\mathcal{C}^1$!!!! Come è possibile? Ci servono i due lemmi seguenti:

LEMMA (di du Bois-Reymond): Sia $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *tale che* $\int_a^b u(x)\phi'(x)\,dx = 0$ *per ogni* $\phi \in \mathcal{C}^1_z ero([a,b])$*. Allora* $u(x) = cost.$*.*

DIM.: Sia $\psi \in \mathcal{C}^0([a,b])$: definiamo $w(x) = \psi(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(t)\,dt$ e

$$\phi(x) = \int_a^x w(t)\,dt.$$

Allora $\phi \in \mathcal{C}^1_0([a,b])$ e per ipotesi abbiamo

$$\begin{aligned}
&0 = \int_a^b u(x)\phi'(x)\,dx = \\
&\int_a^b [u(x)h(x) - u(x)\frac{1}{b-a}\int_a^b h(s)\,ds]\,dx = \\
&\int_a^b [u(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b u(s)\,ds]h(x)\,dx
\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo scambiato l'ordine di integrazione nel secondo termine (e scambiato anche il nome delle variabili di integrazione...).

Per il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni, questo implica

$$u(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(s)\,ds \quad \forall x \in [a,b].$$

Q.E.D.

COROLLARIO: Siano $u, v \in \mathcal{C}^0([a,b])$ due funzioni tali che

$$\int_a^b [u(x)\phi'(x) + v(x)\phi(x)]\, dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Allora $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $u'(x) = v(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

DIM.: Poniamo $\widetilde{u}(x) = \int_a^x v(t)\, dt$: evidentemente, $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^1$ e $\widetilde{u}' = v$. Allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$:

$$\int_a^b (u(x) - \widetilde{u}(x))\phi'(x)\, dx = -\int_a^b v(x)\phi(x)\, dx + \int_a^b \widetilde{u}'(x)\phi(x)\, dx = 0,$$

dove abbiamo usato l'ipotesi per il primo addendo e abbiamo integrato per parti il secondo. Allora, per il lemma di du Bois-Reymond, abbiamo $u(x) - \widetilde{u}(x) = cost.$, cioè

$$u(x) = u(a) + \int_a^x v(t)\, dt.$$

Q.E.D.

Torniamo al nostro solito funzionale integrale: otteniamo immediatamente il seguente importante teorema

TEOREMA: Sia al solito $f \in \mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, $F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$ per $u \in \mathcal{C}^1$.

Supponiamo poi che $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ soddisfi l'equazione di Eulero debole

$$\delta F(u;\phi) = \int_a^b [f_u(x,u,u')\phi + f_p(x,u,u')\phi'(x)]\, dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Allora, per il corollario precedente la funzione composta $x \mapsto f_p(x, u(x), u'(x))$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e

$$f_y(x, u(x), u'(x)) = \frac{d}{dx}\left(f_p(x, u(x), u'(x))\right),$$

cioè vale l'equazione di Eulero-Lagrange forte!

Si noti che, siccome in generale né u né f sono di classe $\mathcal{C}^2$, non necessariamente la derivata rispetto a x a secondo membro dell'equazione di Eulero forte può essere scritta secondo la regola di derivazione di funzione composta! In questo caso, è forse più espressivo scrivere la condizione necessaria data dall'equazione di Eulero in forma integrale:

$$f_p(x, u(x), u'(x)) = \int_a^x f_y(t, u(t), u'(t))\, dt + C.$$

Per varie ragioni, è anche utile estendere la discussione appena fatta a eventuali minimi del funzionale di classe $\mathcal{C}^1$ *a tratti*: vedremo la prossima volta!

Lezione del 5/10/2007 (3 ore): Vogliamo estendere i risultati sull'equazione di Eulero-Lagrange a estremali di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti. Tanto per avere una notazione compatta, denotiamo tali funzioni[6] con $\widehat{\mathcal{C}}^1([a,b])$.

Dato il solito funzionale integrale $F(u)$ con integranda $f \in \mathcal{C}^1$, consideriamo il probelma di minimo nella classe più ampia delle funzioni $\widehat{\mathcal{C}}^1$:

$$\min\{F(u):\ u \in \widehat{\mathcal{C}}^1([a,b]),\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\}.$$

Il risultato è il seguente:

TEOREMA (Equazione di Eulero per estremali $\widehat{\mathcal{C}}^1$): Se u è un punto di minimo del probema enunciato sopra, allora vale l'equazione di Eulero in forma integrale

$$f_p(x,u(x),u'(x)) = \int_a^x f_y(t,u(t),u'(t))\,dt + C.$$

In particolare, la funzione $x \mapsto f_p(x,u(x),u'(x))$ è ovunque continua, per cui in ogni punto angoloso $\overline{x}$ vale la condizione di Erdman

$$f_p(\overline{x},u(\overline{x}),u'_+(\overline{x})) = f_p(\overline{x},u(\overline{x}),u'_-(\overline{x})),$$

ove $u'_+(\overline{x}) = \lim_{x\to\overline{x}^+} u'(x)$ e $u'_-(\overline{x}) = \lim_{x\to\overline{x}^-} u'(x)$. Infine, in tutti i punti di continuità di u' vale l'equazione di Eulero in forma differenziale.

DIM.: Procediamo come nel caso delle funzioni $\mathcal{C}^1$: spezzando l'integrale sui sottointervalli in cui la derivata è continua, è immediato verificare che deve essere

$$0 = \delta F(u;\phi) = \int_a^b [f_u(x,u,u')\phi + f_p(x,u,u')\phi']\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^1_0([a,b]).$$

Poniamo $g(x) = \int_a^x f_u(t,(t),u'(t))\,dt$: questa è una funzione continua, con eventuali punti di salto nei punti angolosi di u. In tutti gli altri punti si ha $g'(x) = f_u(x,u(x),u'(x))$. Scriviamo la variazione prima come somma di integrali fatti sugli intervalli di continuità di u' e integriamp per parti il primo termine di ciasucuno di essi: rimettendo tutto insieme si ottiene

$$0 = \int_a^b [-g(x) + f_p(x,u,u')]\phi'(x)\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^1_0([a,b])$$

[6] *Diremo che $u:[a,b]\to\mathbf{R}$ è $\mathcal{C}^1$ a tratti se è continua ed è ovunque derivabile con derivata continua, tranne al più in un numero finito di punti angolosi in cui comunque esistono finite (e continue a destra e a sinistra risp.) la derivata destra e la derivata sinistra.*

(tutti i contributi al bordo dei singoli intervallini si cancellano), da cui segue la forma integrale dell'equazione di Eulero grazie al Lemma di du Bois-Reymond[7].

Poiché l'integrale a secondo membro è una funzione continua di x, ne segue la continuità del primo membro e quindi la condizione di Erdman sui punti angolosi. Infine, l'equazione di Eulero nei punti regolari segue applicando il teorema fondamentale del calcolo alla forma integrale. Q.E.D.

Nello studio degli estremali in $\mathcal{C}^1$ e in $\widehat{\mathcal{C}}^1$ gioca un ruolo importante una *seconda forma* dell'equazione di Eulero. Con un semplice conto, è immediato verificare che una soluzione $\mathcal{C}^2$ dell'equazione di Eulero verifica anche l'equazione

$$f_x(x, u(x), u'(x)) = \frac{d}{dx}\left(f(x, u(x), u'(x)) - u'(x) f_p(x, u(x), u'(x))\right),$$

di cui l'equazione di du Bois-Reymond è un caso particolare.

D'altra parte, si può far vedere che la forma integrale di quest'equazione

$$f(x, u(x), u'(x)) - u'(x) f_p(x, u(x), u'(x)) = \int_0^x f_x(t, u(t), u'(t))\, dt$$

è verificata anche da ogni punto di minimo $\widehat{C}^1$ del funzionale. La dimostrazione in questo caso è meno immediata (occorre fare una variazione dell'estremale u usando un'opportuna famiglia ad un parametro di diffeomorfismi dell'intervallo $[a, b]$ in se) e ve la risparmio... ma si ottiene che ogni funzione che minimizza il funzionale in $\widehat{\mathcal{C}}^1$ soddisfa la seconda equazione di Eulero, e anche la seguente *seconda condizione di Erdman* in ogni punto angoloso $\overline{x}$:

$$\begin{gathered} f(\overline{x}, u(\overline{x}), u'_+(\overline{x})) - u'_+(\overline{x}) f_p(\overline{x}, u(\overline{x}), u'_+(\overline{x})) = \\ f(\overline{x}, u(\overline{x}), u'_-(\overline{x})) - u'_-(\overline{x}) f_p(\overline{x}, u(\overline{x}), u'_-(\overline{x})) \end{gathered}$$

Passiamo ora a vedere qualche esempio di problema variazionale in dimensione superiore a uno.

Cominciamo col derivare l'equazione di Eulero in più variabili: sia Ω un aperto limitato regolare di $\mathbf{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dato il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx,$$

[7] Si può applicare anche se, a priori, non sappiamo se la funzione tra parentesi quadre è continua (potrebbe a priori avere dei punti di salto...): si veda la dimostrazione del lemma!

supponiamo di avere una funzione $u \in \mathcal{C}^2\Omega$ che sia soluzione del problema di minimo

$$\min\{F(u) : \ u \in \mathcal{C}^1(\Omega), \ u = g \ su \ \partial\Omega\}.$$

Allora, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^1_0(\Omega)$, le funzioni $u + \varepsilon\phi$ sono ammissibili per il nostro problema e la funzione di una variabile $g(\varepsilon) = F(u+\varepsilon\phi)$ ha un minimo assoluto in 0. Derivando sotto il segno di integrale si ottiene la condizione

$$0 = g'(0) = \delta F(u;\phi) = \int_\Omega [f_u(x,u,\nabla u)\phi + \sum_i f_{p_i}(x,u,\nabla u)\phi_{x_i}] \, dx,$$

che è l'equazione di Eulero in forma debole.

Per ottenere un'equazione differenziale (l'equazione di Eulero in forma forte), ci serve il seguente teorema di integrazione per parti in $\mathbf{R}^n$:

PROPOSIZIONE: Siano $f, \phi \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Allora si ha

$$\int_\Omega f(x)\phi_{x_i}(x) \, dx = -\int_\Omega f_{x_i}(x)\phi(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} f(x)\phi(x) \, n_i(x) \, d\sigma(x),$$

dove n rappresenta la normale esterna a $\partial\Omega$.

DIM.: Si applichi il teorema della divergenza alla funzione vettoriale $f\phi e_i$ (con e_i l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbf{R}^n$). Q.E.D.

Integrando per parti la somma nella forma debole dell'equazione di Eulero ed usando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (che vale anche in più variabili, con identica dimostrazione!) otteniamo la seguente forma forte dell'equazione di Eulero:

$$f_u(x,u(x),\nabla u(x)) = \mathrm{div}\left(\nabla_p f(x,u(x),\nabla u(x))\right).$$

ESEMPIO: Integrale di Dirichlet ed equazione di Laplace/Poisson. Se consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega [\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + f(x)u(x)] \, dx,$$

vediamo che un eventuale minimo di classe $\mathcal{C}^2$ del problema enunciato prima deve soddisfare

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & in \ \Omega \\ u(x) = g(x) & in \ \partial\Omega \end{cases}$$

che è un problema costituito dall'equazione alle derivate parziali di Poisson con condizioni al contorno di tipo Dirichlet.

Viceversa, siccome il funzionale dato è strettamente convesso, un'eventuale soluzione del problema differenziale è automaticamente l'unico minimo assoluto del funzionale nella classe delle funzioni con valore al bordo g.

ESEMPIO: Grafici di area minima. Supponiamo di voler determinare, tra tutte le funzioni sufficientemente regolari che assumono il fissato dato al bordo g, quella che ha il grafico di area minima (problema di Plateau per i grafici). Il funzionale in questo caso è

$$F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx.$$

Verifichiamo per prima cosa che il funzionale è strettamente convesso, perché lo è l'integranda $p \mapsto \sqrt{1 + |p|^2}$. Sia infatti $p_0 \in \mathbf{R}^n$, e introduciamo i vettori $v = (1, p) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $v_0 = (1, p_0) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Dobbiamo far vedere che per ogni p, p_0 vale la disuguaglianza di convessità

$$\sqrt{1 + |p|^2} \geq \sqrt{1 + |p_0|^2} + \frac{p_0 \cdot (p - p_0)}{\sqrt{1 + |p_0|^2}}.$$

In termini di v, v_0 la disuguaglianza precedente diventa

$$|v| \geq |v_0| + \frac{v_0 \cdot (v - v_0)}{|v_0|}$$

che con semplici conti si vede essere equivalente alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|v||v_0| \geq v \cdot v_0$.

Inoltre, si ha uguaglianza se e solo se v e v_0 sono l'uno un multiplo positivo dell'altro. Siccome i due vettori hanno come prima componente 1, l'unica possibilità è che coincidano: la convessità è quindi stretta.

L'equazione di Eulero del funzionale dei grafici di area minima è la seguente *equazione delle superfici minime*:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

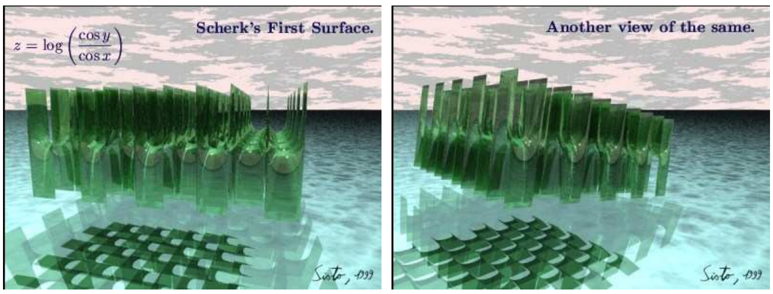
Andando a scartabellare un testo di geometria differenziale, non è difficile rendersi conto che il primo membro dell'equazione non è altro che la *curvatura media* del grafico di u: i grafici di area minima devono dunque avere curvatura media nulla.

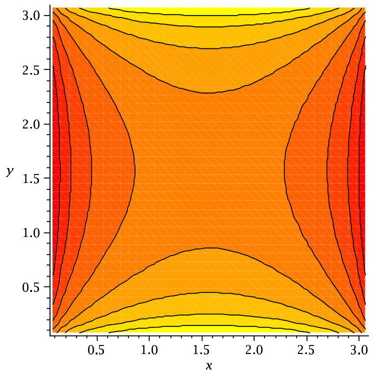
Grazie alla stretta convessità del funzionale, se troviamo una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ che soddisfa l'equazione delle superfici minime in Ω ed assume il dato al bordo g su $\partial\Omega$, quella sarà l'unica soluzione del nostro problema variazionale! Si noti però che non è detto che non possano esistere delle superfici, aventi lo stesso bordo, di area strettamente minore: queste non potranno ovviamente essere grafici di funzioni di x!

Ecco di seguito qualche esempio di grafici minimi (possiamo divertirci a verificare che soddisfano l'equazione...): il primo è la *superficie minima di Scherk*

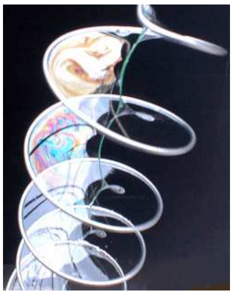
$$u(x, y) = \log\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right).$$

Questa funzione è definita su una "scacchiera" di passo π, ed è singolare sulle rette del tipo $x = k\pi$ o $y = k\pi$. Si noti che essa sarà soluzione del problema variazionale esposto sopra, solo su sottinsiemi limitati del dominio sul cui bordo la funzione è continua. Quelle che seguono sono raffigurazioni della superficie di Sherk:





Un altro esempio è dato da una (porzione di) elicoide, che in coordinate polari (r, θ) ha equazione $u = k\theta$, cioè (in coordinate cartesiane e nell'opportuna regione) $u = k \arctan(y/x)$.



Ma vediamo di studiare un po' il problema delle superfici minime che sono anche superfici di rotazione. Supponiamo di avere una funzione positiva $u : [-\delta, \delta] \to \mathbf{R}$ e di far ruotare il suo grafico attorno all'asse x: otteniamo una superficie di rotazione che ha come bordo due cerchi verticali di raggio $u(-\delta)$ e $u(\delta)$, a distanza 2δ l'uno dall'altro. Supponiamo per semplicità che entrambi questi raggi siano uguali ad una costante fissata η.

Ci chiediamo, tra queste superfici di rotazione, qual è la superficie di area minima. L'area della superficie è data da 2π volte il seguente funzionale:

$$F(u) = \int_{-\delta}^{\delta} u(x)\sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

e vogliamo risolvere il problema variazionale

$$\min\{F(u) : u(-\delta) = u(\delta) = \eta,\ u > 0\}.$$

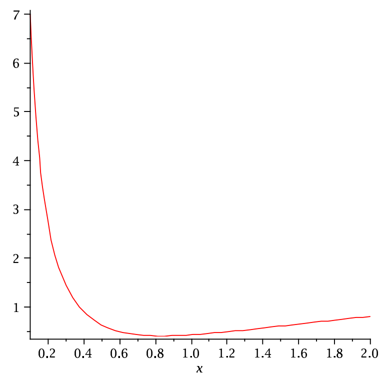
Disgraziatamente il problema non è convesso, per cui non è detto che le soluzioni dell'equazione di Eulero siano punti di minimo. Comunque, l'equazione di du Bois-Reymond è

$$u\sqrt{1 + u'^2} - \frac{u(u')^2}{\sqrt{1 + u'^2}} = c,$$

da cui con facili conti (e a meno del segno) si ricava $u' = \sqrt{(u/c)^2 - 1}$, equazione a variabili separabili che si risolve facilmente. Invertendo la soluzione si trova $u(x) = c\cosh(x/c+k)$, che si vede subito essere soluzione dell'equazione di du Bois-Reymond originale (senza incertezze sui segni...).

Dalla simmetria delle condizioni al contorno $u(\pm\delta) = \eta$ si vede subito che $k = 0$, per cui rimane solo da imporre la condizione $c \cosh(\delta/c) = \eta$. Vedremo la prossima volta se e quando ci si riesce!

Lezione del 8/10/2007 (3 ore): Dobbiamo concludere la nostra discussione sulle superfici minime di rotazione: ci rimaneva da vedere se è possibile trovare dei catenoidi che soddisfano le nostre condizioni al contorno. A questo scopo, ci siamo divertiti a studiare la funzione $g(c) = c \cosh(\delta/c)$: abbiamo visto che essa tende a $+\infty$ per $c \to 0^+$ e per $c \to +\infty$ ed ha un unico punto di minimo assoluto. Ecco il suo grafico (con $\delta = 1$, asse verticale con scala logaritmica):



Come si vede, se η è troppo piccolo (o, il che è lo stesso, se i due anelli che costituiscono la condizione al contorno sono troppo lontani...) non troviamo alcun catenoide che soddisfa il dato. In caso contrario, ce ne sono genericamente *due*, dei quali dovremo prendere quello con area minore. È però interessante notare che c'è un range di η per cui il catenoide esiste, ma per cui il film di sapone costituito dalle *due lamine circolari che chiudono gli anelli* (soluzione di Goldschmidt) hanno area totale *minore* del catenoide!

A questo proposito, osserviamo che *per ora* non abbiamo nemmeno verificato che il catenoide sia una superficie minima (perché le superfici in competizione erano solo quelle con simmetria rotazionale!). Questo è un fatto interessante, e vale la pena di farlo.

Osserviamo innanzitutto che la metà superiore della superficie ottenuta ruotando il grafico di $u(x)$ attorno all'asse delle x ha equazione cartesiana $z = v(x, y) = \sqrt{u^2(x) - y^2}$. Con un contazzo non difficile si ottiene che

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\right) = \frac{uu'' - 1 - (u')^2}{u(1 + u'^2)^{3/2}}.$$

Quest'ultima espressione si annulla se prendiamo $u(x) = c\cosh(x/c)$: il catenoide è effettivamente una superficie minima avendo curvatura media nulla.

Questi calcoletti consentono anche di ritrovare il catenoide *direttamente dall'equazione delle superfici minime*: il conto appena fatto mostra che l'equazione delle superfici minime per grafici ottenuti ruotando la curva $y = u(x)$ attorno all'asse delle x si riduce a

$$u(x)u''(x) = 1 + (u'(x))^2.$$

Moltiplicando ambo i membri per $u'(x)$ e riarrangiando si ottiene:

$$\frac{u'(x)u''(x)}{1 + (u'(x))^2} = \frac{u'(x)}{u''(x)}$$

da cui integrando

$$\log(1 + (u'(x)^2) = \log(cu(x)).$$

Proseguendo il conto si ritrova l'equazione della volta scorsa e si riottiene il catenoide!

OSSERVAZIONE (Cenni sulla teoria delle calibrazioni): I conti che abbiamo fatto sulle superfici minime lasciano un po' l'amaro in bocca: abbiamo visto che un grafico minimo minimizza l'area *tra i grafici* (grazie alla convessità del funzionale), ma potrebbero esistere delle superfici "migliori" che non sono grafici. Ancor peggio ci è andata col catenoide: non abbiamo provato la minimalità!

Per questo motivo, mi piacerebbe dare un'idea di una tecnica molto potente per dimostrare che una data superficie orientata a bordo $S \subset \mathbf{R}^3$ minimizza l'area tra tutte le superfici con lo stesso bordo (come già osservato, S dovrà necessariamente avere curvatura media nulla). Ebbene, la minimalità di S segue facilmente se si riesce a costruire una *calibrazione*, ossia un campo vettoriale liscio $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che verifica le seguenti tre proprietà:

- $\operatorname{div}(\Phi(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^3$;
- $|\Phi(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}^3$;
- $\Phi(x)$ è il versore normale positivo a S per ogni $x \in S$.

Sia infatti S' una superficie orientata con lo stesso bordo di S: avendo lo stesso bordo, le due superfici bordano una regione Ω di $\mathbf{R}^3$. Applichiamo il teorema della divergenza al campo di vettori Φ in Ω: si ha

$$0 = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\Phi(x))\, dx = \int\limits_{S'} \Phi(x) \cdot n_{S'}(x)\, d\sigma(x) - \int\limits_{S} \Phi(x) \cdot n_S(x)\, d\sigma(x),$$

dove n_S, $n_{S'}$ denotano i versori normali positivi alle due superfici. Ne segue che i due integrali nel membro di destra sono uguali: d'altra parte, grazie alla terza proprietà delle calibrazioni si ha

$$\int_S \Phi(x) \cdot n_S(x)\, d\sigma(x) = Area(S),$$

mentre per la seconda proprietà

$$\int_{S'} \Phi(x) \cdot n_{S'}(x)\, d\sigma(x) \leq Area(S'),$$

per cui S ha area minore o uguale a quella di S'.

Come si vede, l'idea di calibrazione è semplicissima: quello che non è affatto facile in generale è costruirne una! D'altro canto, questa è e rimane una delle armi più potenti per provare la minimalità di una superficie.

Tornando ai problemi variazionali unidimensionali, vogliamo parlare un po' di *punti di estremo relativo* e vedere qualche altra condizione necessaria o sufficiente affinché una soluzione dell'equazione di Eulero sia un minimo relativo o assoluto.

Come in dimensione finita, è ragionevole dire che una funzione ammissibile $\overline{u}$ è un punto di minimo relativo del funzionale F se vale $F(\overline{u}) \leq F(u)$ per ogni funzione ammissibile u che sia *sufficientemente vicina* a $\overline{u}$. Siccome siamo in dimensione infinita, ci sono più scelte, tutti naturali, per definire questa "vicinanza": scelte diverse porteranno a risultati diversi!

Le due scelte usate classicamente (a partire da Weierstrass) corrispondono a misurare la distanza tra funzioni ammissibili con la norma $\mathcal{C}^0$ o con la norma $\mathcal{C}^1$:

DEFINIZIONE: Una funzione ammissibile $\overline{u}$ si dice *punto di minimo relativo debole* per il funzionale F se esiste $r > 0$ tale che

$$F(\overline{u}) \leq F(u) \quad \forall u \text{ } ammissibile, \; \|u - \overline{u}\|_{\mathcal{C}}^1 \leq r.$$

Si dice invece *punto di minimo relativo forte* per il funzionale F se esiste $r > 0$ tale che

$$F(\overline{u}) \leq F(u) \quad \forall u \text{ } ammissibile, \; \|u - \overline{u}\|_{\mathcal{C}}^0 \leq r.$$

È buffo notare che i minimi relativi forti sono quelli definiti usando la topologia più debole... In effetti, l'aggettivo si riferisce al fatto che la condizione richiesta è più forte di quella che si richiede per i minimi deboli: in effetti, è evidente che un minimo forte è anche minimo debole. Il viceversa è falso:

ESEMPIO (L. Scheeffer): Si consideri il funzionale $F(u) = \int_0^1 [u'^2 - u'^3 \, dx$ su $\mathcal{C}_0^1([0,1])$. La funzione $u(x) = 0$ è un minimo relativo debole del funzionale (basta prendere per esempio $r = 1/2$), ma non è un minimo relativo forte: se definiamo

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} x/\varepsilon & se\ x \le \varepsilon^2 \\ \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}(x - \varepsilon^2) & se\ x > \varepsilon^2. \end{cases}$$

allora si ha $F(u_\varepsilon) \to -\infty$ per $\varepsilon \to 0^+$. In verità le funzioni costruite sono lipschitziane, ma non è difficile far vedere che la stessa cosa si può fare con funzioni lisce.

Tutte le condizioni necessarie per i minimi trovate fino ad ora per i funzionali integrali, valgono ovviamente per i minimi relativi (anche soltanto deboli): se un funzionale F ha minimo relativo debole in $\overline{u}$, allora la funzione di una variabile $g(\varepsilon) = F(\overline{u} + \varepsilon\phi)$ ha un minimo relativo in 0, qualunque sia $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$. Ne segue che $\delta F(\overline{u}; \phi) = 0$.

Se l'integranda f è di classe $\mathcal{C}^2$, vien voglia di scrivere anche una condizione sulla derivata seconda: si deve ovviamente avere come *condizione necessaria di minimo* che $g''(0) \ge 0$. Per definizione si pone $\delta^2 F(u;\phi) = g''(0)$ (variazione seconda del funzionale). Facendo il contazzo, si scopre subito che

$$\delta^2 F(u;\phi) = \int_a^b [f_{uu}(x,u,u')\phi^2 + 2f_{up}(x,u,u')\phi\phi' + f_{pp}(x,u,u')\phi'^2] \, dx.$$

Viene il dubbio che una disuguaglianza stretta sia sufficiente per avere un punto di minimo relativo (almeno debole): questo è però falso, come mostra il seguente

ESEMPIO (L. Scheeffer): Si consideri il funzionale,

$$F(u) = \int_{-1}^1 [x^2 u'^2 + x u'^3] \, dx$$

sullo spazio $\mathcal{C}_0^1([-1,1])$. E' facile vedere che la funzione nulla $u(x) = 0$ soddisfa l'equazione di Eulero e che $\delta^2 F(0;\phi) > 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1([-1,1])$, $\phi \neq 0$.

D'altra parte, 0 non è un punto di minimo relativo debole: le funzioni

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\varepsilon(x+\varepsilon) & se\ -\varepsilon \le x \le 0 \\ -\frac{4}{3}\varepsilon(x-\varepsilon) & se\ 0 < x \le \varepsilon \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

diventano arbitrariamente vicine a 0 in norma $\mathcal{C}^1$ per $\varepsilon \to 0^+$, ma $F(u_\varepsilon) < 0$.

Se però la variazione seconda non solo è positiva, ma è anche controllata opportunamente da sotto, abbiamo una condizione sufficiente:

PROPOSIZIONE: Sia u una funzione $\mathcal{C}^2$ tale che $\delta F(u;\phi) = 0$,

$$\delta^2 F(u;\phi) \geq \lambda \int_a^b [\phi^2 + \phi'^2]\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]),$$

dove λ è una costante positiva. Allora u è un punto di minimo relativo debole per il nostro problema variazionale.

DIM.: Usando la uniforme continuità delle derivate seconde sui compatti è facile vedere che esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|v - u\|_{\mathcal{C}^1} < \delta$ allora

$$|\delta^2 F(v,\phi) - \delta^2 F(u,\phi)| \leq \frac{\lambda}{2} \int_a^b [\phi^2 + \phi'^2]\, dx.$$

Per queste v si ha quindi $\delta^2 F(u;\phi) \geq \frac{\lambda}{2} \int_a^b [\phi^2 + \phi'^2]\, dx$.

Supponiamo ora che v sia una funzione ammissibile con $\|v - u\|_{\mathcal{C}^1} < \delta$. Evidentemente, la funzione $H(t) = F(u + t(v - u)$ è derivabile due volte nell'intervallo $[0,1]$ per cui possiamo scrivere

$$H(1) - H(0) = H'(0) + \int_0^1 (1-t) H''(t)\, dt.$$

D'altra parte, $H(1) = F(v)$, $H(0) = F(u)$, $H'(0) = \delta F(u; v - u) = 0$, $H''(t) = \delta^2 F(u + t(v-u), v - u)$, da cui sostituendo e usando la stima sulla variazione seconda:

$$F(v) - F(u) \geq \frac{\lambda}{4} \int_a^b [(u - v)^2 + (u' - v')^2]\, dx \geq 0.$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Come intuibile, la condizione sopra non è sufficiente ad avere un minimo forte. Infatti, se prendiamo il funzionale del primo esempio della volta scorsa abbiamo che 0 è un punto di minimo debole ma non forte. D'altra parte, non è difficile verificare che la variazione seconda soddisfa le ipotesi della proposizione (si usi la disuguaglianza di Poincarè per stimare $\int \phi^2$ con $\int \phi'^2$...).

È chiaro che lo studio della variazione seconda non è agevole (perché la disuguaglianza si presenta in forma integrale). Si possono però ottenere con relativa facilità delle condizioni più facili da verificare.

Per esempio, dalla positività della variazione seconda nei punti di minimo segue la seguente, facile condizione necessaria:

PROPOSIZIONE (Condizione necessaria di Legendre): Se l'integranda f è di classe $\mathcal{C}^2$ e $\overline{u}$ è un punto di minimo relativo di classe $\mathcal{C}^2$ di F (con le solite condizioni al bordo), allora

$$f_{pp}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Vedremo domani la dimostrazione.

Lezione del 9/10/2007 (2 ore): Dimostriamo la condizione necessaria di Legendre.

Sia $x_0 \in (a, b)$. Consideriamo le funzioni

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} (x - x_0 + \varepsilon) & se\ x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 \\ -(x - x_0 - \varepsilon) & se\ x_0 < x \leq x_0 + \varepsilon \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Sostituendo nell'espressione della variazione seconda si ottiene $0 \leq \delta^2 F(\overline{u}; \phi_\varepsilon) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_{pp}(x, u(x), u'(x))\ dx + o(\varepsilon)$. Basta dividere per 2ε e passare al limite per $\varepsilon \to 0$ per ottenere la tesi. Q.E.D.

Per concludere questa discussione introduttiva della variazione seconda, diciamo che altre condizioni di semplice utilizzo (sia necessarie che sufficienti) si ottengono studiando l'*equazione accessoria di Jacobi.* Dato un estremale u, questa è l'equazione di Eulero del funzionale $Q(\phi) = \delta^2 F(u; \phi)$. Siccome Q è un funzionale quadratico, l'equazione di Jacobi è semplicemente un'equazione lineare del secondo ordine: posto

$$a(x) = f_{pp}(x, u(x), u'(x)),\ b(x) = f_{up}(\ldots),\ c(x) = f_{uu}(\ldots)$$

si vede subito che l'equazione è

$$-(a(x)\phi(x))' + (c(x) - b'(x))\phi(x) = 0.$$

Ovviamente, supporremo $f \in \mathcal{C}^3$, $u \in \mathcal{C}^2$ per poter scrivere impunemente l'equazione!

Due punti $x_1 < x_2$ in $[a, b]$ si dicono *coniugati* (per l'estremale u) se esiste una soluzione dell'equazione di Jacobi che si annulla in x_1 e x_2, mentre è positiva nell'intervallo (x_1, x_2).

La *condizione necessaria di Jacobi* (che non dimostreremo) dice che se u è di minimo relativo debole, non possono esistere coppie di punti coniugati in $[a,b]$ se non, al più, gli estremi dell'intervallo.

Se poi riusciamo a trovare una soluzione dell'equazione di Jacobi che sia strettamente positiva su tutto l'intervallo $[a,b]$ (estremi compresi), abbiamo un risultato molto interessante:

PROPOSIZIONE: Se nell'intervallo $[a,b]$ *non ci sono coppie di punti coniugati per l'estremale* $u(x)$ *e vale la condizione di Legendre stretta*

$$a(x) = f_{pp}(x, u(x), u'(x)) > 0,$$

allora u *è di minimo relativo debole per il nostro problema variazionale.*

DIM.: Diciamo per prima cosa che esiste una soluzione $v(x)$ strettamente positiva dell'equazione di Jacobi relativa all'estremale u: per costruirla, si considerino la soluzione $v_1(x)$ dell'equazione di Jacobi con dati di Cauchy $v_1(a) = 0$, $v_1'(a) = 1$ e la soluzione $v_2(x)$ con dati $v_2(b) = 0$, $v_2'(b) = -1$. Grazie alla non esistenza di coppie di punti coniugati, v_1 non si annulla mai in $(a,b]$ (ed è quindi strettamente positiva in quell'intervallo). Analogamente, v_2 sarà strettamente positiva in $[a,b)$. Basta allora definire $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$: questa funzione verifica l'equazione $(av')' = (c-b')v$ ed è strettamente positiva in $[a,b]$.

Integrando per parti l'espressione della variazione seconda si vede subito che per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ possiamo scrivere

$$\delta^2 F(u;\phi) = \int_a^b [\phi^2(c-b') - \phi(a\phi')'] \, dx.$$

Siccome v è una soluzione dell'equazione di Jacobi, abbiamo $(c - b') = (av')'/v$, da cui:

$$\begin{aligned}\delta^2 F(u;\phi) &= \int_a^b [\frac{\phi^2}{v}(av')' - \phi(a\phi')'] \, dx = \\ &\int_a^b \frac{\phi}{v}[\phi(av')' - v(a\phi')'] \, dx = \int_a^b \frac{\phi}{v}[a(\phi v' - v\phi')]' = \\ &\int_a^b a(\phi' v - \phi v') \left(\frac{\phi}{v}\right)' \, dx = \int_a^b a v^2 \left|\left(\frac{\phi}{v}\right)'\right|^2 \, dx\end{aligned}$$

(nel penultimo passaggio abbiamo integrato per parti).

Siccome vale la condizione di Legendre stretta, la funzione $a(x)$ ha minimo strettamente positivo su $[a,b]$, cosa che vale anche per $v(x)$ per costruzione.

Usando l'ultima espressione e la disuguaglianza di Poincaré otteniamo allora che

$$\delta^2 F(u,\phi) \geq \mu_1 \int_a^b \left| \left(\frac{\phi}{v} \right)' \right|^2 \, dx \geq \mu_2 \int_a^b (\left| \left(\frac{\phi}{v} \right) \right|^2 + \left| \left(\frac{\phi}{v} \right)' \right|^2) \, dx.$$

Finalmente, dall'ultima stima e con semplici conti si ottiene

$$\delta^2 F(u;\phi) \geq \lambda \int_a^b [\phi^2 + (\phi')^2] \, dx$$

e possiamo applicare la condizione sufficiente di ieri. Q.E.D.

Rafforzando ancora questa condizione, si ottengono condizioni sufficienti per un minimo relativo forte: in questo caso, però, è necessario introdurre la teoria un po' più complicata dei campi di estremali di Weierstrass.

Lezione del 12/10/2007 (3 ore): Vogliamo concludere il nostro discorsetto sull'equazione accessoria di Jacobi e sui punti coniugati. Per prima cosa, vogliamo dimostrare che la non esistenza di punti coniugati in $[a,b]$ è equivalente alla non esistenza di punti *coniugati ad a*: questa è una conseguenza del seguente

TEOREMA (di oscillazione di Sturm): Siano v_1, v_2 due soluzioni indipendenti di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine. Allora tra due zeri di v_1 c'è esattamente uno zero di v_2.

DIM.: Cominciamo con l'osservare che v_1 e v_2 hanno soltanto zeri isolati: se v è una qualunque soluzione non banale della nostra equazione e $v(x_0) = 0$, allora $v'(x_0) \neq 0$ (altrimenti v sarebbe identicamente nulla grazie al teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy). Dunque, $v'(x)$ avrà segno costante in un intorno di x_0 e v sarà ivi strettamente monotona: in quell'intorno non vi saranno dunque altri zeri di v.

Inoltre, la teoria elementare delle equazioni differenziali ci dice anche che il *determinante wronskiano* $w(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$ delle soluzioni v_1, v_2 sarà ovunque non nulla, ed avrà quindi segno costante.

Siano ora x_1, x_2 zeri consecutivi di v_1: senza perdita di generalità, supponiamo che $v_1(x) > 0$ in (x_1, x_2). Avremo quindi $v_1'(x_1) > 0$, $v_1'(x_1) < 0$.

Abbiamo poi $w(x_1) = -v_2(x_1)v_1'(x_1)$, $w(x_2) = -v_2(x_2)v_1'(x_2)$: poiché queste due espressioni devono avere lo stesso segno, concludiamo che $v_2(x_1)$ e $v_2(x_2)$ devono avere segno opposto. Se ne deduce che v_2 si deve annullare almeno una volta in (x_1, x_2).

D'altra parte, se $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ è uno zero di v_2, avremo $w(\overline{x}) = v_1(\overline{x})v_2'(\overline{x})$: se ne deduce che in tutti gli zeri di v_2 compresi tra x_1 e x_2, il segno di v_2' deve essere lo stesso. Dunque, ce n'è uno solo! Q.E.D.

Tornando all'equazione accessoria di Jacobi, un banale corollario del nostro risultato è il seguente: se esiste una coppia di punti coniugati in $(a, b]$, allora a possiede un punto coniugato in $(a, b]$ (si prenda la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Jacobi con condizioni iniziali $v(a) = 0$, $v'(a) = 1$...).

OSSERVAZIONE: Un conto non difficile mostra che una volta integrata l'equazione di Eulero del nostro funzionale, non è difficile trovare due soluzioni indipendenti dell'equazione accessoria di Jacobi: se $u(x, c, k)$ è la soluzione generale dell'equazione di Eulero (con c, k costanti arbitrarie), si vede abbastanza facilmente che $v_1(x) = \frac{\partial u}{\partial c}(x, c, k)$ e $v_2(x) = \frac{\partial u}{\partial k}(x, c, k)$ sono due soluzioni indipendenti dell'equazione di Jacobi.

Vogliamo ora passare ad un altro argomento: come si possano avere dei risultati di esistenza del minimo usando i cosiddetti *metodi diretti del Calcolo delle Variazioni*. L'idea è un'elaborazione del seguente, semplice risultato valido in $\mathbf{R}^n$: se $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una funzione continua tale che $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$, allora f ammette minimo assoluto.

Sia infatti $\{x_k\}$ una successione minimizzante per f, ossia una successione tale che $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = \inf\{f(x) : \ x \in \mathbf{R}^n\} := I$. Per l'ipotesi di divergenza di f all'infinito, la successione $\{x_k\}$ dovrà essere limitata: possiamo dunque estrarre una sua sottosuccessione (che indichiamo ancora $\{x_k\}$) tale che $x_k \to \overline{x}$. Per la continuità di f abbiamo allora

$$f(\overline{x}) = \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = I,$$

e $\overline{x}$ è il punto di minimo cercato.

L'applicazione di quest'idea a funzionali in dimensione infinita non è però così immediata: è un buon esercizio cercare di applicarla al problema variazionale che consiste nel minimizzare

$$F(u) = \int_0^1 [(1 - u'^2)^2 + u^2] \, dx, \quad u \in \mathcal{C}_0^1([0, 1]).$$

Abbiamo visto in una delle prime lezioni che questo problema ha estremo inferiore 0, ma il minimo non esiste.

D'altra parte, la successione minimizzante che abbiamo costruito in quell'occasione è limitata in norma C^1, e converge uniformemente alla funzione nulla. Il problema è che il funzionale è continuo rispetto alla norma $\mathcal{C}^1$, ma non rispetto alla norma $\mathcal{C}^0$ (fatto non sorpendente: nel funzionale compaiono le derivate di u, per cui dovremo pur chiedere una qualche convergenza delle derivate!).

Visto in altro modo, potremmo dire che il nostro problema variazionale non ammette minimo perché le successioni minimizzanti non sono compatte in norma $\mathcal{C}^1$: la ragione della non esistenza di una soluzione è da ricercarsi nella "scarsità" di insiemi compatti!

Questa carestia di compatti è un fatto generale in dimensione infinita: si può dimostrare (teorema di Riesz) che in uno spazio normato la palla unitaria chiusa è compatta *se e soltanto se la dimensione dello spazio è finita.* Per questa ragione, sarà molto difficile che un sottolivello di un funzionale integrale come quelli che abbiamo considerato fino ad ora possa essere compatto nella topologia data da una norma sulle funzioni ammissibili...

Per risolvere questo problema, si cerca di solito di *indebolire la topologia*...con l'effetto spiacevole di perdere la *continuità* del funzionale! Fortunatamente, si possono avere dei teoremi di esistenza del minimo chiedendo un po' meno della continuità: basta che il funzionale sia *semicontinuo inferiormente.*

Abbiamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONI: Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Allora

(i) $K \subset X$ si dice *compatto* se da ogni ricoprimento aperto di K si può estrarre un sottoricoprimento finito;

(ii) K si dice *sequenzialmente compatto* se ogni successione a valori in K possiede una sottosuccessione convergente (rispetto alla topologia di X);

(iii) Una funzione $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ (con $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$) si dice *semicontinua inferiormente* se per ogni $\lambda > 0$ i sottolivelli

$$C_\lambda = \{x \in X : \ f(x) \leq \lambda\}$$

sono chiusi in X;

(iv) Una funzione $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ si dice *sequenzialmente semicontinua inferiormente* se per ogni $\overline{x} \in X$ e per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ con $x_n \to \overline{x}$ si ha

$$f(\overline{x}) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

È ben noto che in uno spazio metrico (i) e (ii) sono equivalenti, mentre in uno spazio topologico qualsiasi i due concetti sono distinti. Analogamente, (iii) e (iv) sono equivalenti in uno spazio metrico (esercizio!).

Date queste definizioni, è semplice dimostrare il seguente

TEOREMA (di esistenza del minimo): Sia X come nelle definizioni precedenti, $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che il sottolivello

$$C_\lambda = \{x \in X : \ f(x) \leq \lambda\}$$

sia non vuoto. Allora se vale una *delle seguenti due ipotesi*

(i) C_λ è sequenzialmente compatto e f è sequenzialmente semicontinua inferiormente oppure

(ii) C_λ è compatto e f è semicontinua inferiormente

esiste un punto di minimo assoluto per f in X.

DIM.: Supponiamo che valga l'ipotesi (i). Prendiamo una successione minimizzante per f, cioè una successione $\{x_n\} \in X$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf\{f(x) : \ x \in X\}$. Una tale successine esiste per definizione di estremo inferiore, e se λ non è già il minimo del funzionale (nel qual caso avremmo finito!) possiamo anche supporre che sia $\{x_n\} \subset C_\lambda$ (basta eventualmente buttar via i primi termini).

Grazie alla compattezza sequenziale di C_λ, esistono una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ e $\overline{x} \in C_\lambda$ tali che $x_{n_k} \to \overline{x}$ per $k \to +\infty$. Usando la semicontinuità sequenziale si ha

$$\inf\{f(x) : \ x \in X\} = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \geq f(\overline{x})$$

e $\overline{x}$ è il punto di minimo cercato.

Se invece vale l'ipotesi (ii), partiamo da una successione minimizzante contenuta in C_λ esattamente come prima. Poniamo $C_n = \{x \in X : \ f(x) \leq f(x_n)\}$: grazie alla semicontinuità (topologica) di f, questa è una successione di chiusi contenuti in C_λ.

Dico che la loro intersezione è non vuota: in caso contrario, per compattezza dovrebbe esistere $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_N = \emptyset,$$

assurdo perché questo insieme contiene uno dei punti $x_1, \ldots, x_N$ (quello cui corrisponde il minimo valore di f).

Allora esiste $\overline{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$: questo è evidentemente il minimo cercato. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Per la validità della parte "sequenziale" del teorema, basta che in X sia definita una convergenza sequenziale, non necessariamente derivante da una topologia su X. Ovviamente, la compattezza sequenziale e la semicontinuità inferiore sequenziale andranno definite a partire da questa convergenza!

Per utilizzare con profitto il risultato astratto appena visto per risolvere problemi variazionali, ci serve qualche risultato di analisi reale sullo spazio $\mathcal{C}^0$ e sugli spazi L^p: cominciamo con un risultato di compattezza valido nello spazio delle funzioni continue.

TEOREMA (di Ascoli-Arzelà): Sia $u_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni continue. Se la successione $\{u_n\}$ è equilimitata (cioè se esiste $M > 0$ tale che $|u_n(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$) ed equicontinua (cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ con $|x - y| < \delta$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ valga $|u_n(x) - u_n(y)| \leq \varepsilon$), allora esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione continua $u : [a, b] \to \mathbf{R}$.

Per dimostrare il teorema, premettiamo il seguente

LEMMA: Sia $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni equilimitate, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in [a, b]$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ tale che per ogni $q \in [a, b] \cap \mathbf{Q}$ esiste finito il limite

$$(*) \qquad \lim_{k \to +\infty} f_{n_k}(q) := f(q).$$

In altre parole, f_{n_k} converge puntualmente alla funzione f su $[a, b] \cap \mathbf{Q}$.

DIM.: Come ben sappiamo, l'insieme $[a, b] \cap \mathbf{Q}$ è numerabile: in altre parole, esiste una successione iniettiva $\{q_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ la cui immagine è esattamente $[a, b] \cap \mathbf{Q}$.

Consideriamo la successione *numerica* $\{f_n(q_0)\}_n$: essa è una successione di *numeri reali* contenuta nell'intervallo *chiuso e limitato* $[-M, M]$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, possiamo estrarre una sottosuccessione, che chiamiamo $\{f_n^0\}_n$, in modo che $f_n^0(q_0)$ converga ad un numero reale che denotiamo $f(q_0)$.

Consideriamo ora la successione numerica $\{f_n^0(q_1)\}_n$: essa è una sottosuccessione di $\{f_n(q_1)\}_n$, e come tale è ancora contenuta nell'intervallo $[-M, M]$. Possiamo allora estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{f_n^1\}_n$ in modo che $f_n^1(q_1)$ converga ad un numero reale che chiameremo $f(q_1)$.

Procedendo ricorsivamente in questo modo, da $\{f_n\}_n$ estraiamo una successione infinita di sottosuccessioni $\{f_n^0\}_n$, $\{f_n^1\}_n$, $\{f_n^2\}_n$, $\{f_n^3\}_n$, $\{f_n^4\}_n$, $\{f_n^5\}_n$, ..., $\{f_n^k\}_n$, ...

La k-esima sottosuccessione $\{f_n^k\}_n$ ha la proprietà che per $i = 0, 1, 2, ..., k$ esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^k(q_i),$$

e tale limite è uguale ad un certo numero reale che chiamiamo $f(q_i)$.

Noi, però, vogliamo un'*unica sottosuccessione* $\{\widetilde{f}_n\}_n$ che converga in *tutti i punti* q_i *contemporaneamente*. Essa puo' essere ottenuta con il vecchio trucco della *successione diagonale*: poniamo $\widetilde{f}_n = f_n^n$ (cioè, l'n-esimo elemento della sottosuccessione diagonale $\widetilde{f}_n$ è l'n-esimo elemento dell'n-esima sottosuccessione che abbiamo estratto sopra).

In questo modo, comunque si fissi k, $\widetilde{f}_n$ è una sottosuccessione di $\{f_n^k\}$ per $n \geq k$, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}_n(q_i) = f(q_i) \qquad \forall i \in \mathbf{N}.$$

Q.E.D.

Lezione del 15/10/2007 (3 ore): Dimostriamo il nostro teorema di compattezza: *DIMOSTRAZIONE del Teorema di Ascoli-Arzelà:* Possiamo applicare il Lemma alla nostra successione di funzioni: otteniamo una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_k$ ed una funzione $f : [a, b] \cap \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(q) = f(q) \quad \forall q \in [a, b] \cap \mathbf{Q}.$$

Ora, affermo che in realtà questa sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente su $[a, b]$ ad una funzione continua: essa ovviamente coinciderà con la precedente f sui razionali... per cui (con lieve abuso di linguaggio) indicheremo ancora con $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ la funzione limite. Dimostreremo questo "magico" risultato facendo vedere che la successione $\{f_{n_k}\}$ è di Cauchy nella metrica della convergenza uniforme.

Dobbiamo far vedere cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{k}$ tale che per ogni $h, k \geq \overline{k}$ si abbia $\|f_{n_h} - f_{n_k}\| < 4\varepsilon$.

Poiché i razionali sono densi in $\mathbf{R}$, possiamo scegliere un numero finito $q_1, \ldots, q_N$ di razionali in $[a, b]$, in modo tale che ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ disti meno di δ (δ è il numero dato dall'equicontinuità...) da uno di questi q_i.

Per come abbiamo scelto la sottosuccessione f_{n_k}, possiamo trovare $\overline{k} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $k \geq \overline{k}$ si abbia

$$(**) \quad |f_{n_k}(q_i) - f(q_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Sia $x \in [a,b]$, e scegliamo $\bar{\imath} \in \{1, \dots, N\}$ tale che $|x - q_{\bar{\imath}}| < \delta$. Allora, tenendo conto di $(**)$ e dell'equicontinuità si ha, per ogni $h, k \geq \overline{k}$:

$$
\begin{aligned}
(***) \qquad & |f_{n_k}(x) - f_{n_h}(x)| \leq \\
& |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(q_{\bar{\imath}})| + |f_{n_k}(q_{\bar{\imath}}) - f(q_{\bar{\imath}})| + |f(q_{\bar{\imath}}) - f_{n_h}(q_{\bar{\imath}})| + \\
& |f_{n_h}(q_{\bar{\imath}}) - f_{n_h}(x)| \leq \\
& L|x - q_{\bar{\imath}}| + \varepsilon + \varepsilon + L|x - q_{\bar{\imath}}| \leq 4\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Passando al massimo per $x \in [a,b]$, otteniamo che la nostra sottosuccessione è di Cauchy rispetto alla metrica uniforme.

Ora, lo spazio delle funzioni continue su $[a,b]$ con la metrica uniforme è *completo*: ogni successione di Cauchy converge uniformemente ad una funzione continua...e il gioco è fatto. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Il teorema di Ascoli-Arzelà vale anche, con dimostrazione praticamente identica, per una successione $f_n : [a,b] \to K$ di funzioni equicontinue a valori in uno *spazio metrico compatto* K. In questo contesto, la distanza uniforme tra due funzioni $f, g : [a,b] \to K$ si definisce (intuibilmente!)

$$d_\infty(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : \ x \in [a,b]\},$$

ed è facile vedere che con questa metrica $\mathcal{C}^0([a,b]; K)$ è ancora completo.

La compattezza (sequenziale) di K è poi esattamente quel che ci serve per rifare la dimostrazione del lemma! Avremo occasione di usare questa versione rafforzata del teorema quando parleremo di geodetiche.

Veniamo a qualche definizione e nozione relativa agli spazi di Lebesgue $L^p([a,b])$.

Se $1 \leq p < +\infty$, definiamo

$$L^p([a,b]) = \{u : [a,b] \to \mathbf{R} \mid u \ \textit{misurabile}, \ \int_a^b |u(x)|^p \, dx < +\infty\},$$

dove l'insieme di funzioni è quozientato rispetto alla relazione di equivalenza

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow u(x) = v(x) \ \textit{per q.o.} \ x \in [a,b].$$

Questo insieme è uno spazio vettoriale reale, che diventa di Banach (spazio normato completo) con la norma

$$\|u\|_{L^p([a,b])} = \left(\int_a^b |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Risulta utile introdurre anche lo spazio $L^\infty([a,b])$ nel modo seguente: data u misurabile, definiamo

$$\|u\|_{L^\infty([a,b])} = \inf\{\lambda \in \mathbf{R} : \ |\{x \in [a,b] : \ |u(x)| > \lambda\}| \ = 0\},$$

dove $|A|$ denota la misura di Lebesgue di un insieme A. Questo numero si chiama anche *estremo superiore essenziale* di $|u|$.

Poniamo allora

$$L^\infty([a,b]) = \{u : [a,b] \to \mathbf{R} \ \mathit{misurabile}, \ \|u\|_{L^\infty([a,b])} < +\infty\},$$

quozientato rispetto alla solita relazione di equivalenza. Anche L^∞ è uno spazio di Banach con la sua norma.

Quando si lavoro con gli spazi L^p, è di fondamentale importanza la *disuguaglianza di Hölder*. Se $1 \leq p \leq +\infty$, l'esponente coniugato di p è l'unico numero $q \in [1,+\infty]$ tale che $1/p + 1/q = 1$ (dove, come intuibile, se $p = 1$ si ha $q = +\infty$, e viceversa). Allora, per ogni coppia di funzioni misurabili u, v vale la seguente disuguaglianza:

$$\int_a^b |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p} \, \|v\|_{L^q}.$$

Veniamo alle proprietà funzionali degli spazi L^p. Abbiamo già detto che sono spazi completi: una successione di Cauchy in L^p converge nella relativa norma. Inoltre, se $u_n \to u$ in L^p (il che vuol dire, ovviamente, che $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$ per $n \to +\infty$), allora si può far vedere che $\{u_n\}$ ha una *sottosuccessione* che converge puntualmente quasi ovunque a u.

Se $1 \leq p < +\infty$, allora le funzioni continue (o anche continue a supporto compatto, $\mathcal{C}^1_0$, $\mathcal{C}^\infty_C$...) formano un sottospazio denso in L^p. In particolare, si può dedurne che L^p è uno spazio *separabile*, nel senso che esiste un sottinsieme denso numerabile. Entrambi questi fatti sono falsi per $p = +\infty$: lo spazio L^∞ non è separabile, e le funzioni continue sono un suo sottospazio proprio chiuso.

L'ultimo teorema che introduciamo senza dimostrazione riguarda il *duale* degli spazi L^p, cioè l'insieme dei funzionali *lineari e continui* $T : L^p \to \mathbf{R}$.

TEOREMA (Riesz): Sia $1 \leq p < +\infty$. *Un'applicazione* $T : L^p \to \mathbf{R}$ *è un funzionale lineare continuo su* L^p *se e soltanto se esiste una funzione* $v \in L^q([a,b])$ *(con* q *esponente coniugato di* p*) tale che*

$$(*) \ T(u) = \int_a^b u(x)v(x) \, dx \qquad \forall u \in L^p([a,b]).$$

Si noti che una delle due frecce del teorema è facile da dimostrare. Infatti, si vede subito che un'applicazione lineare su L^p è continua se e solo se è continua nell'origine, cioè (grazie all'omogeneità) se e solo se esiste una costante $C > 0$ tale che $|T(u)| \le C\|u\|_{L^p}$ per ogni u. Ora, se l'applicazione T verifica $(*)$, allora grazie alla disuguaglianza di Hölder abbiamo $|T(u)| \le \int_a^b |u||v|\, dx \le \|v\|_{L^q}\|u\|_{L^p}$ e T è continuo.

La cosa un po' più difficile è far vedere che *tutti* i funzionali lineari continui su L^p si scrivono come in $(*)$.

Il teorema è invece falso per $p = \infty$: esistono funzionali lineari continui su L^∞ per cui non esiste alcuna funznione $v \in L^1$ per cui vale $(*)$.

Abbiamo già osservato che la palla unitaria di uno spazio normato di dimensione infinita non è mai sequenzialmente compatta. Per esempio, la successione $u_n(x) = \sin nx$ non ha alcuna sottosuccessione convergente negli spazi $L^p([0,1])$...

Per sopperire a questa mancanza di compattezza, diamo la seguente

DEFINIZIONE (Convergenza debole in L^p): Siano $1 \le p < +\infty$, $\{u_n\} \subset L^p([a,b])$, $u \in L^p([a,b])$. Diciamo che u_n *converge debolmente* a u in L^p (e scriviamo $u_n \rightharpoonup u$) se e soltanto se

$$\int_a^b u_n(x)v(x)\, dx \to \int_a^b u(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in L^q([a,b]),$$

dove q è l'esponente coniugato di p.

Si noti che, grazie al Teorema di Riesz, questa definizione è equivalente a richiedere che $T(u_n) \to T(u)$ per ogni elemento T del duale di L^p: questa è la definizione di convergenza debole in uno spazio astratto (e in particolare in L^∞).

Come esempio di/esercizio sulla convergenza debole, si faccia vedere che la successione $u_n(x) = \sin nx$ converge debolmente a 0 in $L^p([0,1])$, $1 \le p < +\infty$ (Lo si mostri dapprima per $v \in C_c^\infty([a,b])$: basta un'integrazione per parti... Si usi poi la densità di questo spazio in L^1 e la disuguaglianza di Hölder).

Abbiamo il seguente risultato di compattezza debole in L^p:

TEOREMA (Compattezza debole in L^p): Sia $1 < p < +\infty$ (si noti che abbiamo esplicitamente escluso $p = 1$ e $p = \infty$). Se $\{u_n\} \subset L^p([a,b])$ è una successione limitata, cioè tale che esiste $C > 0$ per cui $\|u_n\|_{L^p} \le C$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora esiste una sottosuccessione u_{n_k} e una funzione $u \in L^p$ tali che $u_{n_k} \rightharpoonup u$ debolmente in L^p per $k \to +\infty$.

DIM.: Sia q l'esponente coniugato di p. Siccome $q \neq +\infty$, lo spazio $L^q([a,b])$ è separabile: possiamo dunque trovare una successione $\{v_j\}_j \subset L^q([a,b])$ di funzioni L^q, che formino una base di uno sottospazio Y denso in L^q (basta partire da un sottinsieme denso numerabile, e sceglervi un sottinsieme massimale di funzioni linearmente indipendenti...). Dividendo queste funzioni per la loro norma, non è restrittivo supporre $\|v_j\|_{L^q} = 1$ per ogni j.

Grazie alla disuguaglianza di Hölder, si vede subito che per ogni fissato j la successione reale

$$n \mapsto \int_a^b u_n(x) v_j(x) \, dx$$

è equilimitata dalla costante C, e possiede dunque una sottosuccessione convergente.

Usando un procedimento diagonale come nella dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, vediamo allora che è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ di $\{u_n\}$ tale che, per ogni fissato j, la successione reale $k \mapsto \int_a^b u_{n_k}(x) v_j(x) \, dx$ tende ad un certo numero reale c_j.

Se poi $v \in Y$, possiamo scrivere in modo unico $v(x) = \sum_{j=1}^J \lambda_j v_j(x)$. Definiamo allora un funzionale lineare $T : Y \to \mathbf{R}$ tramite

$$T(v) = \sum_{j=1}^J \lambda_j c_j.$$

Si ha per costruzione

$$T(v) = \lim_{k \to +\infty} \int_a^b u_{n_k}(x) v(x) \, dx$$

e da Hölder e dall'equilimitatezza delle u_n segue subito che T è un funzionale lineare continuo su Y.

Per densità, questo si estende in modo unico ad un funzionale lineare continuo $T : L^q \to \mathbf{R}$...e grazie al teorema di Riesz abbiamo che esiste $u \in L^p$ tale che $T(v) = \int_a^b u(x) v(x) \, dx$ per ogni $v \in L^q$.

Abbiamo così trovato $u \in L^p$ tale che

$$\int_a^b u_{n_k} v \, dx \to \int_a^b uv \, dx \quad \forall v \in Y.$$

Grazie alla densità di Y, questa si estende a tutte le $v \in L^q$. Q.E.D.

Per studiare funzionali integrali del calcolo delle variazioni, abbiamo bisogno di spazi di funzioni *dotate di derivate* e che godano di buone proprietà di compattezza. A questo scopo, sono utilissimi gli *spazi di Sobolev* $W^{1,p}([a,b])$, una famiglia di spazi modellati su L^p. Per definirli, è necessaria seguente nozione:

DEFINIZIONE (Derivata debole): Sia $u \in L^1([a,b])$. Una funzione $v \in L^1([a,b])$ si dice *derivata debole* di u se vale

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Abbiamo già visto (lemma di du Bois-Reymond) che se u e v sono continue, allora u è derivabile con derivata v: è infatti a questo risultato che possiamo far risalire l'idea di derivata debole. Inoltre, si vede subito (con l'opportuna versione L^1 del lemma fondamentale del calcolo delle variazioni) che la derivata debole, se esiste, è anche *unica.* La indicheremo dunque con u'.

Grazie a questa definizione, è facile definire gli spazi di Sobolev:

DEFINIZIONE (Spazi di Sobolev $W^{1,p}$): Se $1 \leq p \leq +\infty$ definiamo lo spazio di Sobolev

$$W^{1,p}([a,b]) = \{u \in L^p([a,b]) : \textit{esiste } u' \textit{ derivata debole di } u, \textit{ e } u' \in L^p([a,b])\}.$$

Sullo spazio $W^{1,p}$ si usa mettere una delle seguenti due norme equivalenti:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \textit{ oppure } \|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

Useremo indifferentemente l'una o l'altra. La seconda è vantaggiosa per $p = 2$ perché deriva da un prodotto scalare.

OSSERVAZIONE: E' facile vedere che $W^{1,p}$ è uno spazio normato completo (spazio di Banach): se $\{u_k\} \subset W^{1,p}$ è di Cauchy, allora sia $\{u_k\}$ che $\{u_k'\}$ sono di Cauchy in L^p. Siccome L^p è completo, esistono u, v tali che $u_k \to u$, $u_k' \to v$ in L^p.

Resta da mostrare che $u \in W^{1,p}$ e $v = u'$. Infatti, per definizione di derivata debole abbiamo

$$\int_a^b u_k\phi'\,dx = -\int_a^b u_k'\phi\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ si ottiene

$$\int_a^b u\phi'\,dx = -\int_a^b v\phi\,dx,$$

come volevasi. Si noti che quest'ultimo ragionamento sarebbe corretto anche se avessimo soltanto la convergenza *debole* di u_k a u e di u_k' a v: quest'osservazione ci tornerà utile in seguito!

Lezione del 16/10/2007 (2 ore): La nostra definizione degli spazi di Sobolev può essere facilmente generalizzata a funzioni definite su $\mathbf{R}^n$. Tuttavia, nel caso unidimensionale vale una caratterizzazione particolarmente potente degli spazi di Sobolev, che ne semplifica moltissimo l'utilizzo: vedremo tra un attimo che per molti versi le funzioni di Sobolev assomigliano moltissimo alle funzioni $\mathcal{C}^1$ perché sono continue (a meno di modificarle su un insieme di misura nulla) e sono primitivi della loro derivata debole!

Questa caratterizzazione purtroppo non vale in dimensione superiore.

Per caratterizzare gli spazi di Sobolev abbiamo però bisogno di una definizione:

DEFINIZIONE (Funzioni assolutamente continue): Definiamo lo spazio delle funzioni assolutamente continue come l'insieme delle funzioni che sono *primitive di funzioni* L^1:

$$AC([a,b]) = \{u : [a,b] \to \mathbf{R}\ \exists v \in L^1([a,b])\ t.c.\ u(x) = u(a) + \int_a^x v(t)\ dt\ \forall x \in [a,b]\}.$$

Un teorema di analisi reale non facilissimo (ma neanche eccessivamente difficile!) mostra che una tale u è derivabile quasi ovunque, e che $u'(x) = v(x)$ per quasi ogni x: vale dunque il teorema fondamentale del calcolo integrale nel senso che u è primitiva della propria derivata. Inoltre, vale la seguente caratterizzazione delle funzioni AC con gli ε e i δ:

Una funzione $u : [a,b] \to \mathbf{R}$ *è assolutamente continua se e soltanto se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che, per ogni collezione finita* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,...,$[a_N, b_N]$ *di sottointervalli due a due disgiunti di* $[a,b]$ *con* $\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < \delta$, *vale*

$$\sum_{i=1}^{N} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon.$$

Come si vede, questa caratterizzazione è un rafforzamento della definizione di uniforme continuità: in particolare, una funzione assolutamente continua è ovunque continua (come si poteva mostrare anche a partire dalla definizione originale...). Inoltre, la caratterizzazione consente di provare facilmente che il *prodotto di due funzioni assolutamente continue* è una funzione assolutamente continua.

Proveremo ora che lo spazio delle funzioni assolutamente continue *coincide* in buona sostanza con lo spazio di Sobolev $W^{1,1}([a,b])$. Precisamente, ogni funzione assolutamente continua appartiene allo spazio di Sobolev e, viceversa, data $u \in W^{1,1}$ esiste una funzione assolutamente continua che coincide quasi ovunque con u.

Ci servono due lemmi:

LEMMA 1: Se $u \in W^{1,1}([a,b])$ ha derivata debole nulla, allora u coincide quasi ovunque con una costante.

DIM.: Nel caso in cui u è continua, abbiamo già dimostrato questo Lemma: è il lemma di du Bois-Reymond visto nella lezione del 5 maggio! La dimostrazione è assolutamente identica anche in questo caso: verificarlo per esercizio... Q.E.D.

LEMMA 2: Se $u \in AC([a,b])$, allora $u \in W^{1,1}([a,b])$. Inoltre, la derivata classica di u (che sappiamo definita quasi ovunque) è anche la derivata debole di u.

DIM.: Intanto, dalla definizione di AC segue che sia u che u' sono in L^1. Sia poi $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$: evidentemente, anche ϕ è una funzione assolutamente continua.

Allora la funzione prodotto $u\phi$ è assolutamente continua e si ha $(u\phi)' = u'\phi + u\phi'$ quasi ovunque. Integrando:

$$0 = \int_a^b (u\phi)'\, dx = \int_a^b (u'\phi + u\phi')\, dx,$$

che è esattamente come dire che u' è la derivata debole di u. Q.E.D.

TEOREMA: Sia $u \in W^{1,1}([a,b])$. Allora esiste $\tilde{u} \in AC([a,b])$ tale che $u(x) = \tilde{u}(x)$ per quasi ogni x. Quindi, a meno di cambiare u su un insieme di misura nulla per renderla AC, la derivata debole di u coincide con la sua derivata classica[8].

DIM.: Definiamo $w(x) = \int_a^x u'(t)\, dt$. Questa è una funzione assolutamente continua che, per il LEMMA 2, è anche in $W^{1,1}$ ed ha derivata debole u'. Allora la funzione $u - w$ ha derivata debole nulla, da cui per il LEMMA 1 $u(x) - w(x) = c$ quasi ovunque. Basta allora porre $\tilde{u}(x) = c + w(x)$ per avere la tesi. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Se $1 < p \leq +\infty$, le funzioni di $W^{1,p}$ sono anche in $W^{1,1}$. Se $u \in W^{1,p}$ possiamo dunque supporre (scegliendo il giusto rappresentante della classe di equivalenza di u in L^p) che la nostra funzione sia assolutamente continua. In questo senso, lo spazio $W^{1,p}$ coincide con lo spazio delle funzioni assolutamente continue *la cui derivata appartiene a L^p*. Queste funzioni non sono soltanto assolutamente continue, sono anche Hölderiane di esponente $1 - 1/p$: se $x, y \in [a,b]$ si ha infatti, usando la disuguaglianza di Hölder:

$$|u(x) - u(y)| = |\int_x^y u'(t)\, dt| \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{1-1/p}.$$

[8] Si tenga presente il LEMMA 2.

Le funzioni di $W^{1,\infty}$ sono poi lipschitziane.

In realtà (sempre a patto di prendere il rappresentante assolutamente continuo di ogni classe di equivalenza), lo spazio $W^{1,\infty}$ *coincide* con lo spazio delle funzioni lipschitziane. Infatti, ogni funzione lipschitziana è assolutamente continua, e se u ha costante di Lipschitz L, i suoi rapporti incrementali sono limitati da L...e quindi $|u'(x)| \leq L$in tutti i punti di derivabilità: una funzione lipschitziana ha derivata in L^∞.

L'osservazione appena fatta (il fatto che le funzioni di $W^{1,p}$ con $p > 1$ sono hölderiane, con costante controllata dalla norma L^p di u') è la chiave del seguente importante risultato di compattezza:

TEOREMA (di compattezza debole in $W^{1,p}$): Sia $\{u_n\} \subset W^{1,p}([a,b])$, $1 < p < +\infty$ (e supponiamo che ognuna delle u_n sia AC). Se esiste una costante $C > 0$ tale che $\|u'_n\|_{L^p} \leq C$ per ogni n, e vale anche una delle seguenti due condizioni:

(i) $|u_n(a)| \leq C$

(ii) $\|u_n\|_{L^p} \leq C$

allora esiste $u \in W^{1,p}$ e una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tali che $u_{n_k} \to u$ uniformemente, $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$ debolmente in L^p per $k \to +\infty$.

Dimostreremo il teorema la prossima volta.

Lezione del 19/10/2007 (2 ore): Dimostriamo il teorema di compattezza in $W^{1,p}$. Grazie all'osservazione precedente e all'equilimitatezza delle derivate in L^p, tutte le nostre funzioni soddisfano la disuguaglianza di hölderianità

$$(*)|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x-y|^{1-1/p} \quad \forall x, y \in [a,b].$$

In particolare, le funzioni u_n sono equicontinue.

Supponiamo poi che valga (i). Allora, usando $(*)$ si ha per ogni x e per ogni n

$$|u_n(x)| \leq |u_n(a)| + |u_n(x) - u_n(a)| \leq C + C(b-a)^{1-1/p}$$

e quindi le u_n sono anche equilimitate.

Usando il teorema di Ascoli-Arzelà e il teorema di compattezza debole in L^p troviamo $u \in C^0$, $v \in L^p$ e una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tali che $u_{n_k} \to u$ uniformemente, $u'_{n_k} \rightharpoonup v$ debolmente in L^p. Come abbiamo già osservato (si veda la dimostrazione della completezza degli spazi $W^{1,p}$), questo implica che $u \in W^{1,p}$ e $v = u'$.

Rimane da dimostrare il risultato se sostituiamo la (i) con la (ii). In realtà, facciamo vedere che $(ii) \Rightarrow (i)$: abbiamo infatti, per ogni $x \in [a,b]$, $u(a) = u(x) - \int_a^x u'(x)\, dx$.

Allora $|u(a)| \leq |u(x)| + \int_a^b |u'(x)|\, dx$. Integrando su $[a,b]$ (e dividendo ambo i membri per $b-a$):

$$|u(a)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(x)|\, dx + \int_a^b |u'(x)|\, dx,$$

e abbiamo già visto come maggiorare le norme L^1 a destra con norme L^p (usando la disuguaglianza di Hölder). Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Un risultato simile vale anche per $p = +\infty$: se $\{u_n\} \subset W^{1,\infty}$ possiamo utilizzare il teorema per ogni $p < +\infty$ per trovare la sottosuccessione convergente. Inoltre, la successione è formata da funzioni equilipschitziane (perché le derivate sono equilimitate in L^∞), per cui anche il limite sarà una funzione lipschitziana. Le derivate convergeranno debolmente in L^p per tutti i p finiti (e, in realtà, anche in L^∞ debole*).

Il teorema è invece irrimediabilmente falso per $p = 1$: è facile costruire delle successioni equilimitate in norma $W^{1,1}$ che convergono a funzioni discontinue. Per esempio, si considerino le seguenti funzioni su $[-1,1]$:

$$u_n(x) = \begin{cases} -1 & se\ -1 \leq x \leq -1/n \\ nx & se\ -1/n < x < 1/n \\ 1 & se\ 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

COROLLARIO (convergenza debole in $W^{1,p}$): Se $1 < p < +\infty$ e $\{u_n\} \subset W^{1,p}([a,b])$ è una successione tale che $u_n \rightharpoonup u$, $u'_n \rightharpoonup u'$ debolmente in L^p, con $u \in W^{1,p}$, allora u_n converge uniformemente a u.

DIM.: Grazie ad un risultato standard di analisi funzionale (teorema di Banach-Steinhaus), ogni successione che converge debolmente in L^p è equilimitata in norma.

Sia ora $\{u_{n_k}\}$ una fissata sottosuccessione di $\{u_n\}$: per quanto osservato questa sottosuccessione sarà equilimitata in norma $W^{1,p}$, e grazie al teorema di compattezza possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{u_{n_{k_h}}\}$ che converge uniformemente, con derivate che convergono debolmente. Ovviamente, il limite non può che essere u perché già in partenza la successione tendeva debolmente a questa funzione!

Dall'arbitrarietà della sottosuccessione u_{n_k}, possiamo concludere che *tutta* la successione originale $\{u_n\}$ converge a u uniformemente[9]. Q.E.D.

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare un risultato di semicontinuità inferiore per funzionali integrali: assieme al teorema di compattezza, ne dedurremo un semplice risultato di esistenza.

Come vedremo, la condizione per avere semicontinuità inferiore è la convessità dell'integranda $f(x,u,p)$ rispetto alla terza variabile. Questa richiesta è comunque *molto più debole* della richiesta di convessità del funzionale che facevamo nei teoremi visti nella prima parte del corso!

TEOREMA (di semicontinuità inferiore di Tonelli): Sia $f : [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to [0,+\infty)$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^1$ non negativa *e tale che* $p \mapsto f(x,u,p)$ *è* convessa *per ogni fissato* $(x,u) \in [a,b] \times \mathbf{R}$. *Allora il funzionale*

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

è ben definito per ogni $u \in W^{1,1}([a,b])$ *(anche se può assumere il valore* $+\infty$ *per qualche* u*). Inoltre, per ogni successione* $\{u_n\}_n \subset W^{1,1}([a,b])$ *per cui esiste* $u \in W^{1,1}([a,b])$ *tale che* $u_n \to u$ *uniformemente in* $[a,b]$, $u_n' \rightharpoonup u$ *debolmente in* $L^1([a,b])$ *vale la disuguaglianza di semicontinuità*

$$F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Per dimostrare il teorema ci serviranno tre semplici lemmi:

LEMMA 1 (Assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue): Sia $v \in L^1([a,b])$. *Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che, per ogni insieme misurabile* $A \subset [a,b]$ *con* $|A| < \delta$, *vale*

$$\int_A |v(x)|\, dx < \varepsilon.$$

DIM.: Se la tesi fosse falsa, dovrebbe esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste un insieme misurabile A_n con $|A_n| < 1/2^n$ e $\int_{A_n} |v|\, dx \geq \varepsilon_0$.

[9] Questo risultato è valido in ogni spazio metrico: se $\{u_n\}$ ha la proprietà che ogni sua sottosuccessione ha un ulteriore sottosuccessione che converge ad un elemento u dello spazio (sempre lo stesso), allora anche la successione originale vi tende.

Poniamo $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$: questa è una successione decrescente di insiemi misurabili. Usando la subadditività della misura di Lebesgue scopriamo subito che $|B_n| \leq 1/2^{n-1}$, per cui $|\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |B_n| = 0$. Ora, dato che $A_n \subset B_n$ si ha $\int\limits_{B_n} |v| \; dx \geq \varepsilon_0$. Questo è assurdo, in quanto la successione di funzioni $v_n(x) = |v(x)| \; \mathbf{1}_{B_n}(x)$ tende quasi ovunque a 0 ed è dominata dalla funzione sommabile $|v|$: per il teorema della convergenza dominata di Lebesge si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{B_n} |v| \; dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b v_n(x) \; dx = 0.$$

Q.E.D.

LEMMA 2: Sia $v : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione misurabile tale che* $\int_a^b |v(x)| \; dx = +\infty$. *Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che se* A *è misurabile,* $|A| < \delta$ *si ha* $\int\limits_{[a,b]\setminus A} |v(x)| \; dx > \frac{1}{\varepsilon}$.

DIM.: Se fosse falso, esisterebbe $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ trovo A_n misurabile, $|A_n| < 1/2^n$ e $\int\limits_{[a,b]\setminus A_n} |v(x)| \; dx \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$.

Definiamo come nella dimostrazione precedente $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$: questa volta l'assurdo viene dal teorema di Beppo Levi, in quanto da una parte abbiamo $\int\limits_{[a,b]\setminus B_n} |v(x)| \; dx \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$, dall'altra questi integrali devono tendere a $+\infty$. Q.E.D.

LEMMA 3 (Misurabilità della composizione): Sia $g(x,y)$ *una funzione continua su* $[a,b] \times \mathbf{R}$, $v : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione misurabile. Allora la funzione composta* $h(x) = g(x, v(x))$ *è misruabile.*

DIM.: Supponiamo dapprima che $v(x)$ sia una funzione semplice: esiste una partizione finita dell'intervallo $[a,b]$ in insiemi misurabili $A_1, A_2, \ldots, A_N$ tale che

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(x).$$

Sia poi $B \subset \mathbf{R}$ un aperto. Allora gli insiemi $h^{-1}(B) \cap A_i = \{x \in A_i : g(x, \alpha_i) \in B\}$ sono evidentemente misurabili. Facendone l'unione otteniamo $h^{-1}(B)$ che è quindi anch'esso misurabile, da cui la misurabilità di h. Nel caso generale, data v misurabile prendiamo una successione v_k di funzioni semplici che convergano puntualmente a v. Allora $g(x, v_k(x) \to h(x) = g(x, v(x))$ e h è misurabile perché limite puntuale di funzioni misurabili.

Si noti che questa dimostrazione richiederebbe solo che g fosse misurabile in x per ogni y, e continua in y per quasi ogni x (condizione di Caratheodory). Q.E.D.

Lezione del 22/10/2007 (3 ore): Dimostriamo il teorema di semicontinuità di Tonelli. Per quanto riguarda la buona definizione del funzionale, si tratta di far vedere che la funzione composta $x \mapsto f(x, u(x), u'(x))$ è misurabile per ogni $u \in W^{1,1}$: questa è una conseguenza immediata del Lemma 3 se poniamo $g(x, y) := f(x, u(x), y)$.

Siano $\{u_n\}$, u come nell'enunciato, e supponiamo dapprima che sia $F(u) < +\infty$. Allora la funzione $x \mapsto f(x, u(x), u'(x))$ appartiene a L^1. Fissato $\varepsilon > 0$, per il Lemma 1 possiamo trovare $\delta > 0$ tale che, se A è misurabile con $|A| < \delta$ allora $\int\limits_A f(x, u, u')\, dx < \varepsilon$.

Ora, poiché $u' \in L^1$, è possibile scegliere una costante M abbastanza grande in modo che l'inseme $A_M = \{x \in [a, b] : \ |u'(x)| > M\}$ abbia misura strettamente minore di δ. Per farlo, basta osservare che

$$\|u'\|_{L^1} \geq \int\limits_{A_M} |u'|\, dx > M\ |A_M|,$$

da cui $|A_M| < \frac{\|u'\|_{L^1}}{M}$. Grazie alla regolarità della misura di Lebesgue, possiamo poi trovare un aperto, ancora con misura minore di δ, che contiene A_M: passando al complementare, troviamo un compatto K tale che $|[a, b] \setminus K| < \delta$ e $|u'(x)| \leq M$ per ogni $x \in K$.

Per chiarire meglio l'idea della dimostrazione, supponiamo per un momento che l'integranda sia del tipo $f(x, p)$ (e cioè che non vi sia dipendenza esplicita dalla variabile u). Siccome l'integranda è positiva e convessa rispetto a p per ogni fissato x, abbiamo

$$F(u_n) \geq \int\limits_K f(x, u_n'(x))\, dx \geq \int\limits_K f(x, u')\, dx + \int\limits_K f_p(x, u')(u_n' - u')\, dx.$$

Il secondo integrale tende a 0 *grazie alla definizione di convergenza debole*, perché $f_p(x, u'(x))$ è una funzione L^∞ (in quanto f_p è continua e u' è limitata su K), mentre $u_n' - u' \rightharpoonup 0$ debolmente in L^1. Invece, grazie alla scelta di δ fatta sopra, il primo integrale è maggiore o uguale a $F(u) - \varepsilon$. In conclusione, prendendo il minimo limite otteniamo

$$\liminf_{n \to +\infty} F(u_n) \geq F(u) - \varepsilon,$$

da cui segue la tesi grazie all'arbitrarietà di ε.

Se f dipende anche da u, la dimostrazione si complica solo di poco. Ragionando come prima possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
&F(u_n) = \int_a^b f(x, u_n, u_n')\,dx \geq \int_K f(x, u_n, u_n')\,dx \geq \\
&\int_K f(x, u_n, u')\,dx + \int_K f_p(x, u_n, u')(u_n' - u')\,dx = \\
&\int_K f(x, u_n, u')\,dx + \int_K [f_p(x, u_n, u') - f_p(x, u, u')](u_n' - u')\,dx + \\
&\int_K f_p(x, u, u')(u_n' - u')\,dx = A_n + B_n + C_n.
\end{aligned}$$

Vediamo di calcolare i limiti delle tre quantità A_n, B_n, C_n.

Siccome $u_n \to u$ uniformemente e u' è limitata in K, grazie all'uniforme continuità della funzione f sui compatti abbiamo che $f(x, u_n, u') \to f(x, u, u')$ uniformemente in K, per cui

$$A_n \to \int_K f(x, u, u')\,dx \geq F(u) - \varepsilon.$$

In maniera del tutto analoga, $[f_p(x, u_n, u') - f_p(x, u, u')] \to 0$ uniformemente in K, mentre la successione $(u_n' - u')$ è equilimitata in L^1 (perché converge debolmente a 0). Grazie alla disguaglianza di Hölder, ne deduciamo che $B_n \to 0$.

Infine, la funzione $x \mapsto f(x, u(x), u'(x))$ appartiene a $L^\infty(K)$ mentre $(u_n' - u') \rightharpoonup 0$ debolmente in L^1. Per definizione di convergenza debole, ne deduciamo che $C_n \to 0$.

In conclusione, abbiamo scoperto che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u) - \varepsilon$$

da cui segue la tesi grazie all'arbitrarietà di ε.

Rimane da discutere il caso in cui $F(u) = +\infty$: in tal caso, grazie al Lemma 2 per ogni fissato ε troviamo δ tale che $|A| < \delta$ implica $\int_{[a,b]\setminus A} f(x, u, u')\,dx > 1/\varepsilon$.

Procedendo esattamente come prima, scopriamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \frac{1}{\varepsilon},$$

che grazie all'arbitrarietà di ε implica la tesi. Q.E.D.

Mettendo assieme quello che sappiamo, otteniamo il seguente, semplice risultato di esistenza:

TEOREMA di esistenza (Tonelli): Sia $f(x, u, p)$ un'integranda che soddisfa le ipotesi del teorema di semicontinuità. In più, supponiamo che ci siano due costanti $m > 1$, $K > 0$ tali che valga la seguente stima dal basso (nota come condizione di coercività con espoenente m):

$$f(x, u, p) \geq K|p|^m \quad \forall (x, u, p) \in [a, b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Allora, dato il solito funzionale $F(u) = \int_a^b f(x, u, u')\, dx$, il problema variazionale

$$\min\{F(u) : \ u \in W^{1,1}([a, b]),\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$$

ammette una soluzione $u \in W^{1,m}([a, b])$.

DIM.: Indichiamo con ℓ l'estremo inferiore del funzionale nella nostra classe di funzioni ammissibili di Sobolev. Innanzitutto, osserviamo che ℓ è finito: infatti, il funzionale è finito su tutte le funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfano le condizioni al contorno.

Sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante, cioè una successione di funzioni ammissibili tali che $F(u_n) \to \ell$. In particolare, la successione reale $F(u_n)$ è limitata da una costante C e, grazie alla stima dal basso:

$$C \geq F(u_n) \geq K \int_a^b |u_n'|^m\, dx,$$

per cui la successione $\{u_n'\}$ è equilimitata in L^m. Poiché abbiamo anche $u_n(a) = \alpha$, possiamo applicare il nostro teorema di compattezza in $W^{1,m}$: troviamo una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ e $\overline{u} \in W^{1,m}$ tali che $u_{n_k} \to \overline{u}$ uniformemente in $[a, b]$, $u_{n_k}' \rightharpoonup \overline{u}'$ debolmente in L^m (e, a maggior ragione, debolmente in L^1). Grazie al teorema di semicontinuità abbiamo allora

$$F(\overline{u}) \leq \liminf_{k \to +\infty} F(u_{n_k}) = \ell,$$

e $\overline{u}$ è la soluzione cercata del nostro problema variazionale (si noti infatti che $\overline{u}$ soddisfa le condizioni al contorno: è limite uniforme di funzioni che le soddisfano!). Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Nel risultato originale di Tonelli viene provato un teorema più generale. Infatti, la condizione di coercività con esponente $m > 1$ viene indebolita, chiedendo che valga una condizione di crescita superlineare del tipo

$$f(x, u, p) \geq c\Psi(|p|),$$

dove Ψ è una funzione crescente tale che $\lim_{p\to+\infty} \Psi(p)/p = +\infty$. Sotto questa ipotesi, è possibile provare l'esistenza del minimo nella classe delle funzioni $W^{1,1}$.

L'ipotesi di crescita superilineare consente di ottenere la compattezza debole delle derivate in L^1: abbiamo già osservato che affinché una successione $\{v_n\}$ sia debolmente compatta in L^1 non basta che sia equilimitata in norma. In realtà, occorre che valga *anche* un'altra condizione nota come *equiintegrabilità* (o *equi-assoluta continuità*): per ogni $\varepsilon > 0$ deve esistere $\delta > 0$ tale che se A è misurabile e $|A| < \delta$ allora $\int_A |v_n|\, dx < \varepsilon$. Questa condizione è ottimale, nel senso che è soddisfatta da qualunque successione debolmente convergente in L^1.

Non è difficile verificare che l'ipotesi di crescita superlineare implica proprio l'equilimitatezza e l'equiintegrabilità delle derivate di una successione minimizzante.

La condizione di convessità rispetto a p della funzione integranda $f(x, u, p)$ non è soltanto una condizione sufficiente per avere la semicontinuità inferiore negli spazi di Sobolev: è anche una condizione necessaria!

Per semplicità, mostreremo questo risultato soltanto per integrande che dipendono solo dalla variabile p: se aggiungiamo anche la dipendenza da x e da u, l'idea della dimostrazione è la stessa, ma c'è qualche complicazione tecnica.

Cominciamo la nostra discussione con un lemma, che è anche un bell'esercizio sulla convergenza debole:

LEMMA: Siano $\lambda \in (0, 1)$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$. Definiamo una funzione $v : [0, 1] \to \mathbf{R}$ come segue

$$v(x) = \begin{cases} y_1 & \text{se } 0 \le x \le \lambda, \\ y_2 & \text{se } \lambda < x \le 1. \end{cases}$$

Estendiamo poi v ad una funzione periodica di periodo 1 definita su tutto $\mathbf{R}$. Allora la successione di funzioni $v_n(x) = v(nx)$ converge debolmente alla costante $\overline{y} = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ in tutti gli spazi L^p, $1 \le p < +\infty$. Anzi, vale

$$\int_0^1 v_n(x)\phi(x)\, dx \to \overline{y} \int_0^1 \phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in L^1([0, 1])$$

(convergenza debole in L^∞).*

DIM.: La funzione v ha integrale $\overline{y}$ sul periodo $[0, 1]$, per cui $v_n(x)$ ha integrale $\overline{y}/n$ sul suo periodo. Ne segue facilmente che, se fissiamo $0 \le x_1 < x_2 \le 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_1}^{x_2} v_n(x)\, dx = \overline{y}(x_2 - x_1).$$

Grazie alla linearità dell'integrale abbiamo allora che

$$\int_a^b v_n(x)s(x)\,dx \to \overline{y}\int_a^b s(x)\,dx$$

per ogni *funzione a scala* s. Ora, le funzioni a scala sono dense in L^1: l'ultima relazione di limite varrà dunque per qualsiasi funzione L^1. Q.E.D.

PROPOSIZIONE: Sia $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e definiamo il funzionale $F(u) = \int_0^1 f(u')\,dx$. Supponiamo che per F valga la seguente disuguaglianza di semicontinuità: per ogni $\{u_n\} \subset W^{1,\infty}$, $u \in W^{1,\infty}$ tali che $u_n \to u$ unifomemente, $u'_n \rightharpoonup^* u'$ debole in L^∞, si ha*

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).^{10}$$

Allora f è una funzione convessa.

DIM.: Fissiamo $\lambda \in (0, 1)$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ e sia v_n la successione costruita nel lemma. Definiamo poi $u_n(x) = \int_0^x v_n(t)\,dt$: non è difficile vedere che la successione di funzioni equilipschitziane u_n tende uniformemente alla funzione lineare $u(x) = \overline{y}x$:

$$u_n(x) - \overline{y}x = \int_0^x (v_n(t) - \overline{y})\,dt = \int_0^1 (v_n(t) - \overline{y})\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dt \to 0$$

grazie alla convergenza debole di v_n a $\overline{y}$. La convergenza è poi uniforme (si usi per esempio il teorema di Ascoli-Arzelà...).

Allora, per l'ipotesi di semicontinuità

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

D'altra parte $F(u) = \int_0^1 f(\overline{y}) = f(\overline{y})$, mentre $F(u_n) = \int_0^1 f(v_n)\,dx = \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2)$ (perché le funzioni v_n valgono y_1 su un insieme di misura totale λ, y_2 su un insieme di misura $(1-\lambda)$).

Abbiamo così trovato la disuguaglianza di convessità

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \le \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2).$$

Q.E.D.

Vogliamo ora occuparci della regolarità dei minimi che abbiamo trovato: è vero che se f è una funzione regolare che soddisfa le ipotesi del teorema

[10] Si noti che la semicontinuità in uno qualsiasi degli spazi $W^{1,p}$ implica questa ipotesi: stiamo chiedendo il *minimo possibile* di semicontinuità!

di esistenza di Tonelli, allora il minimo nello spazio $W^{1,m}$ è in realtà una funzione regolare che soddisfa l'equazione di Eulero?

In realtà, le patologie sono possibili: del resto, abbiamo già visto che anche con integrande polinomiali i minimi possono avere dei punti angolosi!

Sotto opportune ipotesi, però, abbiamo dei risultati di regolarità. Il più semplice è forse il seguente:

TEOREMA (di regolarità dei minimi): Sia $f : [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, e supponiamo che valgano le seguenti tre ipotesi:

(i) esistono $m > 1$, $C > 0$ tali che

$$f(x,u,p) \leq C(1+|p|^m) \quad \forall (x,u,p) \in [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R};$$

(ii) esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|f_u(x,u,p)| + |f_p(x,u,p)| \leq C(1+|p|^m) \quad \forall (x,u,p) \in [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

(iii) esiste una costante $\nu > 0$ tale che $f_{pp}(x,u,p) \geq \nu$ per ogni $(x,u,p) \in [a,b] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Allora ogni minimo (anche relativo) $u \in W^{1,m}$ del funzionale $F(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx$ sullo spazio

$$\{u \in W^{1,m}([a,b]) : \ u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta\}$$

è di classe $\mathcal{C}^2([a,b])$ e soddisfa l'equazione di Eulero.

Lezione del 23/10/2007 (2 ore): Dimostriamo il teorema di regolarità, dividendo la dimostrazione in più passi. Nel seguito, indicheremo con C una costante positiva che può anche cambiare da un passaggio all'altro: si tratta di un lieve abuso di notazione abbastanza comune quando si dimostrano risultati di regolarità (altrimenti si rischia di impazzire a dare nomi diversi a tutte le costanti!).

I PASSO: Il nostro estremale u soddisfa l'equazione di Eulero debole

$$\int_a^b [f_u(x,u(x),u'(x))\phi(x) + f_p(x,u(x),u'(x))\phi'(x)]\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]).$$

Fissiamo infatti $\phi \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ e consideriamo la funzione $H(\varepsilon) = F(u + \varepsilon\phi)$. Grazie a (i) ed alla minimalità di u, questa funzione è ben definita e continua per ogni ε, ed ha un minimo relativo per $\varepsilon = 0$.

Fissiamo $\varepsilon_0 > 0$ e supponiamo d'ora in poi $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Allora, è facile vedere che esiste $C > 0$ tale che $|u'(x) + \varepsilon\phi'(x)|^m \leq C(1 + |u'(x)|^m)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Poniamo $g(\varepsilon, x) = f(x, u(x) + \varepsilon\phi(x), u'(x) + \varepsilon\phi'(x))$. Per ogni fissato x, questa funzione è continua e derivabile rispetto a ε e si ha

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(\varepsilon, x) = \quad & f_u(x, u(x) + \varepsilon\phi(x), u'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi(x) + \\ & f_p(x, u(x) + \varepsilon\phi(x), u'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi'(x). \end{aligned}$$

Usando (ii) (si noti che u è continua e dunque limitata) e la stima ottenuta poc'anzi per $|u' + \varepsilon\phi'|^m$ otteniamo che esiste $C > 0$ tale che

$$|g_\varepsilon(\varepsilon, x)| \leq C(1 + |u'(x)|^m.$$

Abbiamo così scoperto che la derivata parziale g_ε è dominata da una funzione L^1 indipendente da ε. Questo ci permette di usare il teorema della convergenza dominata per mostrare che possiamo derivare sotto il segno di integrale: si ha infatti

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varepsilon} F(u + \varepsilon\phi) = \lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{g(\varepsilon + h, x) - g(\varepsilon, x)}{h} \, dx = \\ & \lim_{h \to 0} \int_a^b g_\varepsilon(\varepsilon + h\theta(x)) \, dx, \end{aligned}$$

dove $\theta(x) \in (0, 1)$ esiste per il teorema di Lagrange.

L'integranda dell'ultima espressione tende a $g_\varepsilon(\varepsilon, x)$ quando $h \to 0$, e la convergenza è dominata per quanto osservato sopra: otteniamo allora

$$H'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} F(u + \varepsilon\phi) = \int_a^b g_\varepsilon(\varepsilon, x) \, dx.$$

Siccome H è derivabile e 0 è un punto di minimo relativo, deve essere $H'(0) = 0$ e otteniamo finalmente che u soddisfa l'equazione di Eulero debole.

II PASSO: Il nostro estremale u è di classe $\mathcal{C}^1$, e soddisfa quindi l'equazione di Eulero grazie alla teoria di du Bois-Reymond.

Nel passo precedente, abbiamo osservato che le funzioni $\zeta(x) = f_u(x, u(x), u'(x))$ e $\xi(x) = f_p(x, u(x), u'(x))$ sono sommabili. Allora, grazie alla definizione di derivata debole e a quel che sappiamo dello spazio $W^{1,1}$, l'equazione di Eulero debole

$$\int_a^b [\zeta\phi + \xi\phi'] \, dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1([a, b])$$

ci assicura che, a meno di un insieme di misura nulla, $\xi \in AC([a, b])$ e $\xi' = \zeta$ quasi ovunque. In particolare, esiste una costante $k > 0$ tale che questo rappresentante assolutamente continuo è dato da

$$\xi(x) = \int_a^x \zeta(t) \, dt + k$$

per ogni $x \in [a,b]$.

D'altra parte, grazie all'ipotesi (iii), la funzione

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & [a,b]\times \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \to & [a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\ & (x,u,p) & \mapsto & (x,u,f_p(x,u,p)) \end{array}$$

è un diffeomorfismo $\mathcal{C}^1$ (lo è localmente grazie al teorema del Dini, è poi evidentemente iniettiva e suriettiva perché la funzione di una variabile $p \mapsto f_p(x,u,p)$ è strettamente crescente con derivata limitata dal basso, per ogni fissato $(x,u) \in [a,b]\times\mathbf{R}$). Ne segue che $\Psi^{-1}(x,u(x),\xi(x))$ è una ben definita funzione continua. Dalla definizione di Ψ e dal fatto che $\xi(x) = f_p(x,u(x),u'(x))$ q.o., otteniamo

$$\Psi^{-1}(x,u(x),\xi(x)) = (x,u(x),u'(x))$$

per quasi ogni x, da cui $u'(x)$ coincide quasi ovunque con una funzione continua. Se ne deduce che $u \in \mathcal{C}^1$ (grazie al lemma di du Bois-Reymond, che possiamo rienunciare dicendo che una funzione continua con derivata debole continua è di classe $\mathcal{C}^1$...), come volevamo.

III PASSO: $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$:

Ormai sappiamo che l'equazione di Eulero vale per ogni $x \in [a,b]$: in particolare, la teoria di du Bois-Reymond ci assicura che la funzione $f_p(x,u(x),u'(x))$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Ma allora, per definizione di Ψ, abbiamo

$$(x,u(x),u'(x)) = \Psi^{-1}(x,u(x),f_p(x,u(x),u'(x)))$$

e la composizione nel membro di destra è di classe $\mathcal{C}^1$ grazie alla regolarità delle funzioni coinvolte.

Si noti che questo ragionamento ci consente di ottenere una maggiore regolarità se l'integranda f è a sua volta più regolare: in particolare, se f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ allora anche u è infinitamente derivabile! Q.E.D.

Come applicazione del metodo diretto del calcolo delle variazioni, vogliamo studiare ora il problema dell'esistenza di geodetiche di lunghezza minima. Per prima cosa, dimostreremo l'esistenza di cammini lipschitziani di lunghezza minima in spazi metrici di tipo molto generale.

Nel caso particolare di sottovarietà compatte di $\mathbf{R}^n$, saremo poi in grado di dimostrare che le geodetiche minimizzanti sono curve regolari che soddisfano la classica equazione del secondo ordine cui ci ha abituato la geometria differenziale!

Se (X,d) è uno spazio metrico e $\gamma : [a,b] \to X$ è una funzione continua (curva), ricordiamo che la *lunghezza* di γ si definisce come

$$L(\gamma) = \sup\{\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_{i+1}),\gamma(t_i)) : \; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}.$$

Il nostro risultato di esistenza è il seguente:

TEOREMA (esistenza di geodetiche minimizzanti): Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e siano $p, q \in X$ due punti tali che esiste almeno una curva continua $\gamma : [a, b] \to X$ tale che $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ e $L(\gamma) < +\infty$. Allora, tra tutte le curve continue che congiungono p e q ce n'è almeno una di lunghezza minima.

DIM.: Per ipotesi, l'insieme delle curve continue di lunghezza finita che congiunge p e q non è vuoto. Sia ℓ l'estremo inferiore delle lunghezza di tali curve e scegliamo una successione minimizzante $\{\gamma_n\}$, cioè una successione di curve continue $\gamma_n : [0, 1] \to X$ tali che $\gamma_n(a) = p$, $\gamma_n(b) = q$ e $\lim_{n\to+\infty} L(\gamma_n) = \ell$. Si noti che l'ipotesi che tutte le curve siano definite sull'intervallo $[0, 1]$ non è restrittiva: basta eventualmente fare un cambiamento affine di parametro (la lunghezza non viene affetta da questo cambiamento).

Vorremmo applicare il teorema di Ascoli-Arzelà per estrarre una sottosuccessione che converga ad una qualche curva $\tilde{\gamma}$.

Purtroppo, l'invarianza della lunghezza per riparametrizzazione costituisce una difficoltà: si capisce subito come, anche a partire da una successione di curve che già converge uniformemente, sia facile fare un cambiamento selvaggio delle parametrizzazioni in modo da distruggere la convergenza stessa! Al contrario, quel che dovremo fare è riparametrizzare le curve $\{\gamma_n\}$ in modo oculato in modo da renderle *equicontinue*...

Viene subito in mente di scegliere delle parametrizzazioni in cui le curve vengano percorse *con velocità costante*, cioè un parametro *proporzionale alla lunghezza d'arco*... Il fatto che il problema sia ambientato in uno spazio metrico generale complica un pochino l'operazione, ma vedremo che non è troppo difficile!

La riparametrizzazione dipende da lemma seguente:

LEMMA: Sia $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva continua di lunghezza finita $L(\gamma)$. Definiamo una funzione $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ nel modo seguente: per ogni $\tau \in [0, 1]$ $g(\tau) := L(\gamma|_{[0,\tau]})$ è la lunghezza del tratto iniziale della curva percorso quando il parametro varia tra 0 e τ. Allora g è una funzione non decrescente e continua.

Dimostrazione la prossima volta!

Lezione del 26/10/2007 (3 ore): Dimostriamo il lemma sulla funzione lunghezza d'arco per curve continue a valori in uno spazio metrico. Che $g(\tau)$ sia una funzione crescente è assolutamente evidente! Meno ovvia è la continuità: dobbiamo mostrare che la lunghezza di un tratto di curva individuato da un sottointervallino sufficientemente corto nell'intervallo dei parametri può essere resa arbitrariamente piccola.

Facciamolo, senza perdita di generalità, per il tratto *iniziale* della curva (il ragionamento si generalizza facilmente alla dimostrazione della continuità a sinistra e a destra in qualunque punto dell'intervallo $[0,1]$): facciamo vedere cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $g(\delta) < \varepsilon$.

Per definizione di lunghezza, possiamo trovare un numero finito di punti $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ tali che $\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) + \varepsilon/2 \geq L(\gamma) = g(1) = g(t_1) + [g(1) - g(t_1)]$. Grazie alla continuità di γ in 0, non è restrittivo supporre $d(\gamma(t_1), \gamma(t_0)) < \varepsilon/2$ (se così non fosse, aggiungiamo un nuovo punto "iniziale" con questa proprietà alla nostra partizione facendo aumentare ulteriormente la somma). Ora, spezzando la somma nel primo addendo più tutto il resto e ricordando che $g(1) - g(t_1)$ è la lunghezza del tratto di curva tra t_1 e 1, otteniamo: $\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) < \varepsilon/2 + [g(1) - g(t_1)]$. Mettendo assieme le due stime che abbiamo si ha dunque $g(t_1) < \varepsilon$. Q.E.D.

CONCLUSIONE della dimostrazione del teorema: Riprendiamo la nostra successione minimizzante $\{\gamma_n\}$. Grazie al lemma le funzioni $g_n : [0,1] \to [0, L(\gamma_n)]$, $g_n(t) := L(\gamma_n|_{[0,t]})$ sono continue e non decrescenti. In particolare esse sono suriettive, per cui esistono delle inverse destre $h_n : [0, L(\gamma_n)] \to [0,1]$ tali che $g_n(h_n(s)) = s$ per ogni $s \in [0, L(\gamma_n)]$. Le funzioni h_n possono avere delle discontinuità di salto (corrispondenti ad eventuali tratti costanti delle g_n, e quindi delle curve γ_n): in ogni caso, le funzioni composte $\gamma_n^* : [0, L(\gamma_n)] \to X$ date da $\gamma_n^*(s) = \gamma_n(h_n(s))$ sono continue, e per costruzione hanno la proprietà che la lunghezza del loro tratto iniziale $[0,s]$ ha esattamente lunghezza s!

Poniamo finalmente $\tilde{\gamma}_n : [0,1] \to X$, $\tilde{\gamma}_n(s) := \gamma_n^*(L(\gamma_n)\, s)$. Queste curve sono continue, hanno lunghezza uguale alle γ_n e sono lipschitziane di costante $L(\gamma_n)$ (perchè il tratto di curva corrispondente a $[s_1, s_2]$ ha per costruzione lunghezza $L(\gamma_n)(s_2 - s_1)$, e tale lunghezza è ovviamente maggiore o uguale a $d(\tilde{\gamma}_n(s_2), \tilde{\gamma}_n(s_1)))$.

Abbiamo dunque una successione di funzioni equilipschitziane a valori in uno spazio metrico compatto: per il teorema di Ascoli Arzelà esisterà una sottosuccessione $\tilde{\gamma}_{n_k}$ e una curva $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbf{R}$ tali che $\tilde{\gamma}_{n_k} \to \tilde{\gamma}$ uniformemente in $[0,1]$ per $k \to +\infty$.

Dico che $L(\tilde{\gamma}) \leq \liminf_{k \to +\infty} F(\tilde{\gamma}_{n_k}) = \ell$, e che dunque $\tilde{\gamma}$ è la curva di lunghezza minima cercata (essa soddisfa evidentemente anche le condizioni al contorno!). In realtà, questo risultato di semicontinuità è vero anche se si ha soltanto convergenza puntuale: fissiamo infatti $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$

ed applichiamo la definizione di lunghezza:

$$\sum_{i=1}^{N-1} d(\tilde{\gamma}_{n_k}(t_{i+1}), \tilde{\gamma}_{n_k}(t_i)) \leq L(\tilde{\gamma}_{n_k}).$$

Prendendo il lim inf di ambo i membri:

$$\sum_{i=1}^{N-1} d(\tilde{\gamma}(t_{i+1}), \tilde{\gamma}(t_i)) \leq \liminf_{k\to+\infty} L(\tilde{\gamma}_{n_k}).$$

Passando al sup nel membro di sinistra si ottiene la disuguaglianza di semicontinuità desiderata. Q.E.D.

Supponiamo ora che M sia una sottovarietà di dimensione n, compatta e liscia, di uno spazio euclideo $\mathbf{R}^N$, e che $p, q \in M$ siano punti che si possono connettere con una curva continua a valori in M. Sappiamo, grazie al teorema precedente, che allora esiste una curva lipschitziana di lunghezza minima che li congiunge.

Vogliamo dimostrare che questa curva di lunghezza minima è una geodetica regolare.

A questo scopo, cominciamo coll'osservare che nel nostro caso la lunghezza di una curva si riduce ad un funzionale integrale:

OSSERVAZIONE (Funzionale lunghezza e funzionale energia): Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^N$ una curva assolutamente continua. Allora la lunghezza di γ si può calcolare integrando il vettore velocità:

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt.$$

Questo risultato è ben noto nel caso di curve di classe $\mathcal{C}^1$, ma è vero anche per curve assolutamente continue: la dimostrazione risale ad un lavoro di Tonelli, e segue in maniera relativamente agevole dalla teoria delle funzioni a variazione limitata.

Come già osservato, questo funzionale ha la proprietà, per certi versi sgradevole, di essere invariante per riparametrizzazione della curva. Per ovviare a questo, si introduce spesso il *funzionale energia* definito come

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\gamma'(t)|^2\, dt.$$

Riprendiamo la varietà $M \subset \mathbf{R}^N$ di cui sopra: mostriamo che se una curva minimizza il funzionale energia tra tutte le curve nell'insieme

$$\mathcal{C} = \{\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n :\ \gamma \in AC([0,1]),\ \gamma(t) \in M\ \forall t \in [0,1],\ \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\}$$

allora essa minimizza anche il funzionale lunghezza. Viceversa, una curva parametrizzata con velocità costante che minimizza in $\mathcal{C}$ il funzionale lunghezza, minimizza anche il funzionale energia.

La chiave per provare questa affermazione consiste nell'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, per ogni $\gamma \in \mathcal{C}$ vale $(*)$ $L(\gamma) \leq \sqrt{2E(\gamma)}$, con uguaglianza se e solo se γ è parametrizzata con velocità costante. Ora, se $\tilde{\gamma}$ minimizza il funzionale E e γ è un'altra curva ammissibile parametrizzata con velocità costante, si ha $L(\tilde{\gamma}) \leq \sqrt{2E(\tilde{\gamma})} \leq \sqrt{2E(\gamma)} = L(\gamma)$, per cui $\tilde{\gamma}$ minimizza il funzionale lunghezza.

Viceversa, supponiamo che $\tilde{\gamma}$ minimizzi in $\mathcal{C}$ il funzionale lunghezza: non è restrittivo supporre che $\tilde{\gamma}$ sia parametrizzata con velocità costante. Se $\gamma \in \mathcal{C}$ è una qualunque altra curva,

$$\sqrt{2E(\tilde{\gamma})} = L(\tilde{\gamma}) \leq L(\gamma) \leq \sqrt{2E(\gamma)},$$

per cui $\tilde{\gamma}$ minimizza anche il funzionale energia.

Dunque una curva di lunghezza minima $\overline{\gamma}$ parametrizzata con velocità costante minimizza anche il funzionale energia. Cercheremo dunque di dimostrare un risultato di regolarità per i minimi di $E(\gamma)$! Siccome la regolarità è un fatto locale, ci basterà dimostrare che ogni pezzettino di $\overline{\gamma}$ completamente contenuto in una carta locale è effettivamente regolare.

Sia dunque $\Psi : W \to M$ una carta locale di M (cioè un diffeomorfismo tra W e $\Psi(W) \subset M$), con W aperto di $\mathbf{R}^n$. Sia poi $V \subset\subset W$.Notiamo che sul compatto $\overline{V}$ la carta locale Ψ ha derivate (di ogni ordine) limitate.

Per quanto osservato sopra, non è restrittivo supporre che $\overline{\gamma} : [0,1] \to \Psi(V)$, e che la curva sia parametrizzata con velocità costante: questo è un "pezzettino" della nostra geodetica minimizzante. Si noti che, essendo parte di una curva di lunghezza minima tra p e q, a maggior ragione $\overline{\gamma}$ minimizzerà la lunghezza tra tutte le curve a valori in $\Psi(V)$ che hanno i suoi stessi dati al bordo.

Sia $\sigma : [0,1] \to V$ la rappresentazione della curva nella carta locale, cioè $\overline{\gamma}(t) = \Psi(\sigma(t))$. Allora, per il teorema di derivazione di funzione composta:

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\sigma(t))\sigma_i'(t), \\
|\overline{\gamma}'(t)|^2 &= \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\sigma(t)) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(\sigma(t))\ \sigma_i'(t)\sigma_j'(t) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\sigma(t))\sigma_i'(t)\sigma_j'(t),
\end{aligned}$$

dove $g_{ij}(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}(x)$ sono gli elementi del tensore metrico letti in carte locali. In particolare, osserviamo che la matrice $G(x) = (g_{ij}(x))_{ij}$ è simmetrica e definita positiva su W[11]. In particolare, sull'aperto più piccolo $\overline{V}$ la matrice $G(x)$ e la matrice inversa $G^{-1}(x)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, limitate e con derivate limitate.

Scrivendo il funzionale energia rispetto a σ otteniamo la seguente, ben nota espressione in carte locali:

$$E(\overline{\gamma}) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\gamma'(t)|^2 \, dt = F(\sigma) := \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\sigma(t))\sigma_i'(t)\sigma_j'(t) \, dt.$$

Sappiamo dunque che σ minimizza il funzionale F tra tutte le curve in V con i suoi stessi dati al bordo. Inoltre, σ è lipschitziana come $\overline{\gamma}$ per quanto osservato sulla limitatezza delle derivate di Ψ (e di Ψ^{-1}). Fissiamo $\phi \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Allora esiste ε_0 tale che se $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ allora la curva $\sigma + \varepsilon\phi e_k$ è contenuta in V (ed ha ovviamente gli stessi estremi di σ). Ne segue che la funzione di una variabile $\varepsilon \mapsto F(\sigma + \varepsilon\phi e_k)$ è ben definita su $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0$ ed ha un punto di minimo assoluto in 0. Ragionando come nel teorema di regolarità, si vede facilmente che possiamo derivare sotto il segno di integrale[12]

Otteniamo allora

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} F(\sigma + \varepsilon\phi e_k) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\sigma)\phi\sigma_i'\sigma_j' + 2\sum_i g_{ik}(\sigma)\sigma_i'\phi'\right] dt$$

per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1$, per ogni $k = 1, \dots, n$.

Per ogni k poniamo

$$\begin{aligned} \zeta_k(t) = & \quad \sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\sigma(t))\sigma_i'(t)\sigma_j'(t), \\ \xi_k(t) = & \quad 2\sum_i g_{ik}(\sigma(t))\sigma_i'(t). \end{aligned}$$

L'equazione precedente diventa allora $\int_0^1 [\zeta\phi + \xi\phi'] \, dt = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1$.

Per quel che sappiamo di g_{ij} e per la lipschitzianità di σ, si ha che $\zeta_k, \xi_k \in L^\infty$. Per definizione di derivata debole, ne deriva che ξ_k è lipschitziana con derivata debole ζ_k.

[11] Se $v, w \in \mathbf{R}^n$, allora $v^T G(x) w = (\nabla\Psi(x)v) \cdot (\nabla\Psi(x)w)$.

[12] La funzione $h(\varepsilon, x) = \sum_{ij} g_{ij}(\sigma(t) + \varepsilon\phi(t)e_k)(\sigma_i'(t) + \varepsilon\phi'(t)\delta_{ik})(\sigma_j'(t) + \varepsilon\phi'(t)\delta_{jk})$ è equilimitata da una costante, assieme alla sua derivata rispetto a ε, per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.Grazie al teorema della convergenza dominata possiamo quindi derivare sotto il segno di integrale.

Consideriamo dunque la funzione vettoriale lipschitziana $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$. Anche la funzione a valori matriciali $t \mapsto \frac{1}{2}G^{-1}(\sigma(t))$ è lipschitziana: applicandola a $\xi(t)$ otteniamo $(*)$ $\sigma'(t) = \frac{1}{2}G^{-1}(\sigma(t))\xi(t)$, da cui σ' è lipschitziana perché lo è il membro di destra di questa identità. Se ne deduce che σ è derivabile due volte con derivata seconda lipschitziana.

Riprendiamo la nostra equazione alla luce di questa informazione: possiamo dire che ζ è continua, per cui il Lemma di du Bois-Reymond ci dice ora che ξ è di classe $\mathcal{C}^1$...e dunque il membro di destra di (*) è di classe $\mathcal{C}^1$. Dunque σ è di classe $\mathcal{C}^2$ e soddisfa l'equazione di Eulero (che in questo caso è un sistema $n \times n$)

$$\sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\sigma(t))\sigma_i'(t)\sigma_j'(t) = \frac{d}{dt}\left(2\sum_i g_{ik}(\sigma(t))\sigma_i'(t)\right).$$

Non è difficile verificare che quest'equazione è proprio l'equazione delle geodetiche cara ai geometri differenziali!

Vogliamo concludere il corso con una brevissima discussione del *fenomeno di Lavrentiev*, una “stranezza” in cui possiamo incoccare quando minimizziamo un funzionale negli spazi di Sobolev.

Abbiamo visto infatti che, in certi casi, il minimo è regolare e soddisfa l'equazione di Eulero. È anche relativamente facile verificare che, per integrande che soddisfano l'ipotesi di crescita dall'alto che abbiamo messo nel nostro teorema di regolarità, il funzionale è *fortemente continuo* rispetto alla convergenza in $W^{1,m}$. Siccome ogni funzione nello spazio di Sobolev $W^{1,m}$ si può approssimare in norma con funzioni regolari, e questa approssimazione si può fare in modo da preservare i dati al bordo, se ne deduce che per ogni $u \in W^{1,m}$ (con dati prescritti al bordo) esiste una successione $\{u_k\} \subset \mathcal{C}^\infty$ con gli stessi dati al bordo e tale che $u_k \to u$ in $W^{1,m}$, $F(u_k) \to F(u)$. In altre parole, il funzionale è ovunque approssimabile *in energia* con funzioni regolari!

Se però le ipotesi del teorema di regolarità vengono a cadere, possono succedere dei fatti curiosi! Un profondo teorema di regolarità dovuto a Tonelli assicura che, comunque, se f è regolare e strettamente convessa allora un minimo $u \in AC$ del funzionale è liscio *al di fuori di un insieme singolare E chiuso e di misura di Lebesgue nulla*. Nell'insieme singolare u ha “derivata” infinita (cioè il limite del rapporto incrementale esiste, ma è infinito). D'altra parte, come scoprì Lavrentiev negli anni '20, l'insieme singolare può essere non vuoto e, ancor più sorprendentemente, può accadere che l'estremo inferiore del funzionale sulle funzioni regolari sia *strettamente più grande* del minimo in AC (o in qualche spazio di Sobolev $W^{1,m}$ con $m > 1$): questo è appunto il *fenomeno di Lavrentiev*.

Un esempio piuttosto semplice è dovuto a B. Manià, ed è il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (x - u^3)^2 |u'|^6 \, dx, \;\; u(0) = 0, \;\; u(1) = 1.$$

Evidentemente, un minimo del problema è dato dalla funzione $u(x) = x^{1/3}$, che appartiene a $W^{1,m}$ per ogni $m < 3/2$. Con dei conti piuttosto laboriosi ma tutto sommato elementari, si mostra che invece l'estremo inferiore del problema variazionale sulle funzioni regolari (o anche lipschitziane) è strettamente positivo.

Questo funzionale non è né strettamente convesso né coercivo, ma può essere modificato e raffinato in modo da renderlo tale: è possibile dare esempi di integrande liscie, strettamente convesse in p e coercive di esponente 2, in modo che tutti i minimi del problema variazionale del tipo sopra abbiano come insieme singolare un *qualunque* fissato insieme chiuso E di misura nulla, e che vi sia il fenomeno di Lavrentiev! Quel che viene a mancare, in questi casi, è l'ipotesi di crescita dall'altro: o meglio, vale un'ipotesi di crescita dall'alto, ma con un esponente *diverso* da quello della coercività.

Bibliografia:

Per approfondire i vari aspetti del corso, vi consiglio i seguenti libri. In particolare: ho consultato il testo di Troutman per quanto riguarda i risultati classici del calcolo delle variazioni, integrando con esempi tratti da Giaquinta-Hildebrandt (che ho utilizzato anche per vari aspetti relativi allo studio della variazione seconda). Per quanto riguarda i metodi diretti, mi sono riferito soprattutto al testo di Buttazzo-Giaquinta-Hildebrandt, integrando con Brezis per quanto riguarda gli spazi di Sobolev in dimensione uno e con Kolmogorov-Fomin per quanto riguarda l'esistenza di geodetiche in spazi metrici.

1. H. Brezis: Analisi Funzionale. Liguori, Napoli (1986).
2. G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: One-dimensional variational problems. Clarendon Press, Oxford (1998).
3. M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of variations I. Springer Verlag (1994).
4. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: Elements of the theory of functions and functional analysis. Dover (1999).
5. J.L. Troutman: Variational Calculus with Elementary convexity. Springer, New York (1983).