DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Università degli Studi di Trento
Via Sommarive - Povo (TRENTO)

Raccolta degli Scritti d'Esame di
ANALISI MATEMATICA U.D. 1
assegnati nei Corsi di Laurea di Fisica, Fisica Applicata, Matematica

(Anno Accademico 2002-2003)

25 ottobre 2002

I Prova di Analisi Matematica - Unità Didattica 1

I Parte - Quiz a scelte multiple

1. Per ogni $q \in \mathbf{Q}$ definiamo $f(q) = 2^q$. La funzione su $\mathbf{Q}$ che abbiamo costruito in questo modo

- assume sia valori razionali che valori irrazionali;
- assume solo valori razionali;
- non è ben definita: non sempre è possibile calcolare 2^q;
- nessuna delle risposte precedenti è corretta;

2. Sia A un sottinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$ tale che $\sup A = +\infty$. Allora

- tutti i numeri naturali $n \in \mathbf{N}$ appartengono ad A;
- tutti i numeri naturali $n \in \mathbf{N}$ abbastanza grandi appartengono ad A;
- per ogni numero naturale $n \in \mathbf{N}$, esiste $a \in A$ tale che $n < a$;
- $\inf A = -\infty$;

3. Se calcoliamo l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{R} : \ x \geq 0, \ \sqrt{x} < 3\}$$

otteniamo

- $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 9$, non c'è massimo;
- $\sup A = -\infty$ perché A è vuoto;
- $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = \max A = 9$;
- $\inf A = -\sqrt{3}$, $\sup A = \sqrt{3}$, non c'è né massimo né minimo;

4. Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione, si considerino le affermazioni

$$(a) \ \sup\{f(x) : \ x \in \mathbf{R}\} = +\infty \qquad\qquad (b) \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Possiamo dire che

- se è vera (a), allora è vera anche (b);

- se è vera (b), allora è vera anche (a);
- (a) e (b) sono certamente entrambe vere;
- (a) e (b) sono certamente entrambe false;

5. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

- vale 1/2;
- vale 0;
- non esiste perchè il numeratore non ammette limite;
- vale $+\infty$;

Le risposte esatte sono: **1.(i), 2.(iii), 3.(i), 4.(ii),5.(ii)**

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

I PROVA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.1, 25/10/2002

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.1 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{n-2} \,:\; n = 3, 4, 5, \dots \right\},$$

specificando se si tratta di massimo e di minimo.

1.2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x(\cos x - 1)}{x^3}.$$

1.3 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}.$$

SOLUZIONI:

1.1 Si può scrivere $\frac{2n-1}{n-2} = 2 + \frac{3}{n-2}$, e osserviamo che l'ultimo addendo a destra decresce al crescere di n. Quindi, l'espressione sarà massima quando n è il più piccolo possibile: $\sup A = \max A = 5$, valore ottenuto per $n = 3$.

D'altra parte, al crescere di n la quantità $\frac{3}{n-2}$ tende a 0, per cui "indoviniamo" che $\inf A = 2$. Per verificarlo, dobbiamo fare vedere che

- $2 + \frac{3}{n-2} \geq 2$ per ogni $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$, il che è ovvio;
- per ogni $k > 0$, esiste $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ tale che

$$2 + \frac{3}{n-2} < 2 + k,$$

cioè $n > \frac{3}{k} + 2$, che è vera per n abbastanza grande. L'estremo inferiore 2 non è minimo perchè non è un elemento dell'insieme.

1.2 Se scriviamo

$$\frac{\sin^2 x(\cos x - 1)}{x^3} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x,$$

grazie al limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ vediamo subito che la prima frazione tende a 1, la seconda a $-1/2$ (visto sia a lezione che a esercitazione), mentre l'ultimo fattore x tende a 0. Dunque il limite assegnato vale 0.

1.3 Abbiamo

$$\frac{x \sin x}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} = \frac{x}{x^2\sqrt{1 + 3/x^2 + /x^4}} \cdot \sin x = \frac{1}{x\sqrt{1 + 3/x^2 + /x^4}} \cdot \sin x.$$

Nell'ultima espressione la frazione tende a 0, mentre la funzione $\sin x$ si mantiene limitata: il limite richiesto è dunque 0.

21 novembre 2002

II Prova di Analisi Matematica - Unità Didattica 1

I Parte - Quiz a scelte multiple

1. Se sappiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, allora possiamo dire che

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$;
- $f(x)$ è positiva in un intorno destro di 0, tranne eventualmente in 0;
- f può assumere sia valori positivi che negativi;
- f è continua in 0;

2. Sia f una funzione derivabile nel punto x_0. La retta tangente al grafico di f per $x = x_0$

- potrebbe non esistere;
- può intersecare il grafico di f in più punti;
- potrebbe non passare nemmeno per il punto $(x_0, f(x_0))$;
- non può essere orizzontale;

3. Il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\log x}$$

- vale 0;
- vale e;
- non esiste;
- vale $+\infty$;

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua che non si annulla mai nell'intervallo $[a, b]$. Allora certamente

- f è sempre positiva in $[a, b]$;
- f ha segno costante in $[a, b]$;
- f è sempre negativa in $[a, b]$;
- f non è costante;

5. Se $f(x) = \log(1 + \sin^2 x)$, allora

- $f'(x) = \log(1 + \sin^2 x)\ 2 \sin x \cos x$;
- $f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{1+\sin^2 x}$;
- $f'(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$;
- $f'(x) = \frac{1}{2 \sin x \cos x}$;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

II PROVA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.1, 21/11/2002

II PARTE: ESERCIZI ED EVENTUALE RECUPERO I PROVA

(A.A. 2002-2003)

Istruzioni: Si scrivano le soluzioni dei primi due esercizi nelle pagine successive. Le soluzioni degli esercizi di recupero vanno scritte sul foglio aggiuntivo.

1.1 Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{x^2+3} - \frac{1}{2}|x|$.

a) Scrivere la derivata di f per $x \neq 0$ e studiarne il segno per individuare gli intervalli in cui la funzione cresce e quelli in cui decresce;

b) Dire se f è derivabile in 0, giustificando adeguatamente la risposta;

c) Si trovino gli intervalli di convessità di f, e si dica anche se f è *globalmente* una funzione convessa;

d) Utilizzando le informazioni raccolte ai punti precedenti, si disegni un grafico qualitativo di f;

1.2 Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3}-1}{\log(1+x^5)}.$$

RECUPERO 1.1 Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme:

$$A = \{(1+\frac{1}{n})^{2n} - \frac{1}{n} : \ n = 1,2,3,\ldots\}.$$

Si dica se essi sono rispettivamente massimo e minimo. (*Suggerimento: si ricordi che la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ è crescente, ed il suo estremo superiore è il numero di Nepero e...*)

RECUPERO 1.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\frac{1}{x})\sqrt{x^6+3x+1}.$$

SOLUZIONI:

1.1

a) Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} & se\ x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{2} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Siccome f è una funzione pari, è sufficiente studiarla per $x > 0$. Si verifica subito che $f'(x) < 0$ se $0 < x < 1$, mentre $f(x) > 0$ se $x > 1$. Dunque f è decrescente in $(0, 1)$, crescente in $(1, +\infty)$. Simmetricamente, f è decrescente in $(-\infty, -1)$, crescente in $(-1, 0)$.

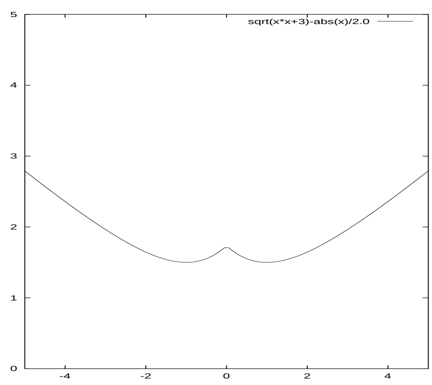
b) Si vede subito che $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, mentre $f'_-(0) = \frac{1}{2}$, per cui f non è derivabile in 0 (punto angoloso). Dalla discussione di cui al punto a), si vede che 0 è anche punto di massimo relativo per f (mentre per $x = -1$ e $x = 1$ abbiamo due minimi relativi).

c) Si ottiene subito, per $x \neq 0$:

$$f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 3)^{3/2}},$$

per cui f è convessa sulle semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Dal grafico di cui al punto successivo, si vede subito che f non è globalmente convessa: per esempio, il segmento che congiunge i due punti di minimo relativo $(-1, \sqrt{3})$ e $(1, \sqrt{3})$ giace tutto al di sotto del grafico della funzione.

d) Rimane da osservare che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, e si può dedurre che il grafico della funzione è fatto più o meno come segue:



Nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO, cambiavano solo le posizioni dei punti di minimo.

1.2 Abbiamo
$$\frac{e^{x^3}-1}{\log(1+x^5)} = \frac{e^{x^3}-1}{x^3} \cdot \frac{x^5}{\log(1+x^5)} \cdot \frac{x^3}{x^5},$$
e quando $x \to 0^+$ le prime due frazioni tendono a 1 (limiti fondamentali), mentre la terza tende a $+\infty$. Quindi il limite chiesto vale $+\infty$.

Nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO, l'argomento della funzione logaritmo anziché essere $(1+x^5)$, era rispettivamente $(1+x^4)$, $(1+x^3)$ e $(1+x^2)$. Di conseguenza, il valore del limite in questi tre casi era $+\infty$, 1 e 0.

RECUPERO 1.1 Consideriamo la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n} - \frac{1}{n}$, di cui l'esercizio chiede di determinare sup e inf. Tenendo conto del suggerimento, vediamo che a_n è una successione crescente (è il quadrato di una successione crescente e positiva, meno una successione decrescente). Dunque l'estremo inferiore, che è anche minimo, è semplicemente $a_1 = 3$. Invece, l'estremo superiore è uguale al limite della successione stessa (teorema sul limite delle successioni monotone), e vale quindi e^2.

Nelle ALTRE VERSIONI, il procedimento era sostanzialmente identico.

RECUPERO 1.2 Si ha
$$\sin(\frac{1}{x})\sqrt{x^6+3x+1} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\sqrt{\frac{x^6+3x+1}{x^2}} =$$
$$\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1+\frac{3}{x^5}+\frac{1}{x^6}}.$$

Sia la frazione che la radice quadrata tendono a 1, mentre x^2 tende a $+\infty$. Il limite assegnato vale quindi $+\infty$.

Con procedimento sostanzialmente identico, anche nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO si arrivava alla stessa conclusione.

6 febbraio 2003

Prova Scritta di Analisi Matematica - U.D.1 (I parte)

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile che sia contemporaneamente concava e convessa. Allora

- $f'(x)$ è strettamente crescente;
- $f'(x)$ è costante;
- $f'(x)$ è strettamente decrescente;
- nessuna delle risposte precedenti è corretta;

2. Il limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x}$

- vale 1;
- vale $-\infty$;
- vale 0;
- vale $\log_{10} e$;

3. L'estremo inferiore dell'insieme $\{\cos q : \; q \in \mathbf{Q}, 0 < q < \pi/4\}$

- vale $\sqrt{2}/2$;
- vale 1;
- vale 0;
- é anche minimo;

4. Sia f una funzione derivabile in x_0 tale che $f(x_0) = 0$. Se anche la funzione $g(x) = |f(x)|$ è derivabile in x_0, allora possiamo dire che

- $f'(x_0) = 0$;
- $f'(x_0) > 0$;
- $f'(x_0) < 0$;
- f è costante;

5. Se A è un insieme finito, allora sicuramente

- esiste $\min A$, ma non $\inf A$;
- esiste $\inf A$, ma non $\min A$;
- esiste $\max A$ e $\max A = \sup A$;
- esiste $\max A$ ma $\max A \neq \sup A$;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.1,

6/2/2003

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.1 Si consideri la funzione $f(x) = \log(1 + x^2) + 2x(\pi/4 - \arctan x)$.

(i) Dopo aver determinato il dominio della funzione, se ne calcoli la derivata prima. Si trovino poi gli intervalli di crescenza e di decrescenza di f, e i suoi eventuali punti di massimo e di minimo relativo.

(ii) Calcolare i limiti di $f(x)$ al tendere di x a $+\infty$ e a $-\infty$.

(iii) Si mostri che $f(x)$ si annulla solo per $x = 0$ e per $x = x_0$, con $x_0 > 1$.

(iv) Si disegni un grafico qualitativo di f, dopo averne studiato anche gli intervalli di concavità e di convessità.

1.2 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+\log x}}{\log(2^{2^x})}$$

1.3 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{e^{6(1-\cos x)^2} - 1}$$

1.4 Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbf{N} :\ n^2 + 3n - 6 \geq 0\},$$

precisando se si tratta di massimo e minimo.

SOLUZIONI:

1.1

(i) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$. Abbiamo poi $f'(x) = 2(\pi/4 - \arctan x)$:la derivata si annulla per $x = 1$, e la funzione è crescente per $x < 1$, decrescente per $x > 1$. Il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo (in realtà anche massimo assoluto), di altezza $f(1) = \log 2$.

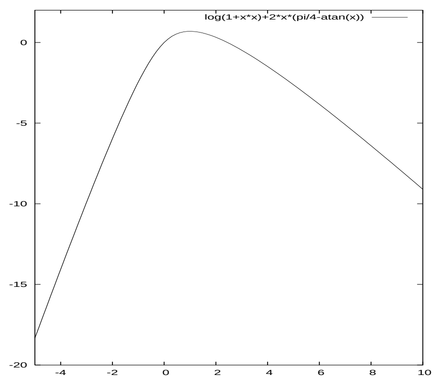
(ii) I due limiti richiesti valgono entrambi $-\infty$.

(iii) Consideriamo le due semirette $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$.

Nella prima la funzione è strettamente crescente. Poichè $f(1) = \log 2 > 0$, mentre $f(x) \to -\infty = -\infty$, possiamo dedurre che f si annulla una ed una sola volta nella semiretta. Poichè $f(0) = 0$, il punto è proprio quello!

Nella seconda semiretta il discorso è del tutto analogo: la funzione è strettamente decrescente e si annulla una ed una sola volta. L'unica differenza è che questa volta non è possibile "indovinare" quanto vale esattamente x_0...

(iv) Abbiamo $f''(x) = -1/(1 + x^2)$, per cui la funzione è concava su tutta la retta reale. Dalle informazioni raccolte ai punti precedenti, si può dedurre che il grafico della funzione è fatto più o meno come segue:



Nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO, la funzione non cambiava.

1.2 Con un semplice passaggio algebrico si ottiene

$$\frac{e^{1+\log x}}{\log(2^{2^x})} = \frac{e}{\log 2} \cdot \frac{x}{2^x},$$

e l'ultima frazione tende evidentemente a 0.

Nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO, il passaggio da compiere era del tutto analogo ed il risultato era identico.

1.3 Ci si riduce facilmente a limiti fondamentali:

$$\frac{\sin^4 x}{e^{6(1-\cos x)^2}-1} =$$
$$\frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \frac{6(1-\cos x)^2}{e^{6(1-\cos x)^2}-1} \cdot \left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

Nell'ultima riga, le prime due frazioni tendono a 1, mentre la terza tende a 4 (limiti fondamentali). Il limite richiesto vale dunque 2/3.

Nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO, con passaggi del tutto analoghi si trovava che il limite valeva rispettivamente 4/5, 1 e 4/3.

1.4 Il polinomio di secondo grado x^2+3x-6 è maggiore o uguale a zero per $x \leq \frac{-\sqrt{33}-3}{2}$ e per $x \geq \frac{\sqrt{33}-3}{2}$. Poichè $\frac{\sqrt{33}-3}{2}$ è un numero compreso tra 1 e 2, abbiamo che $n^2+3n-6 \geq 0$ se e solo se il numero naturale n è maggiore o uguale a 2. Ne deriva che $\inf A = \min A = 2$, mentre $\sup A = +\infty$.

Stesso procedimento e stesso risultato anche nelle ALTRE VERSIONI DEL COMPITO.

14 aprile 2003

Prova Scritta di Analisi Matematica - U.D.1 (I parte)

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, x_0 un punto di minimo assoluto per f. Allora

- certamente $f'(x_0) = 0$;
- $f'(x_0) = \max\{f(x) : \ x \in [a, b]\}$;
- se $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$, allora $f'(x_0) = 0$;
- nessuna delle risposte precedenti è corretta;

2. Il limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$

- vale 1;
- vale $-\infty$;
- vale 0;
- vale $\log_{10} e$;

3. L'insieme $\{\cos n : \ n = 1, 2, 3, \ldots\}$

- è un insieme infinito e limitato;
- è un insieme finito e limitato;
- è un insieme finito e illimitato;
- é un sottinsieme di $\{\mathbf{Q}\}$;

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente crescente. Allora

- f non può avere estremo superiore finito;
- f non può avere estremo inferiore finito;
- f non può ammettere massimo e minimo assoluto;
- f non ammette limite a $+\infty$;

5. Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione strettamente crescente, allora

- f è certamente invertibile da $[a, b]$ in $[f(a), f(b)]$;
- f è certamente invertibile da $[a, b]$ in $[f(b), f(a)]$;
- se f è continua, f è invertibile da $[a, b]$ in $[f(a), f(b)]$;
- f non è sicuramente invertibile;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.1, 14/4/2003
II PARTE: ESERCIZI
(A.A. 2002-2003)

1.1 Si consideri la funzione $f(x) = xe^{x|x|-x^2}$.

(i) Dopo aver determinato il dominio della funzione, se ne calcoli la derivata prima (verificando in particolare se la funzione è derivabile per $x = 0$). Si trovino poi gli intervalli di crescenza e di decrescenza di f, e i suoi eventuali punti di massimo e di minimo relativo.

(ii) Calcolare i limiti di $f(x)$ al tendere di x a $+\infty$ e a $-\infty$.

(iii) Si disegni un grafico qualitativo di f, dopo averne studiato anche gli intervalli di concavità e di convessità.

1.2 Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$\left\{ \sin(\pi(1 - \frac{1}{2n})) : \ n = 1, 2, 3 \dots \right\}.$$

SOLUZIONI:

1.1

(i) La funzione è definita su tutto $\mathbf{R}$, ed è ovunque derivabile nonostante la presenza del modulo ad esponente: infatti, la funzione $x|x|$ è derivabile in 0 dato che sia la derivata destra che la derivata sinistra si annullano. Per $x > 0$, $f(x) = x$ e la funzione è evidentemente crescente (e il suo grafico è la bisettrice del primo quadrante).

Per $x < 0$ abbiamo $f'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2}$, per cui un punto critico è $x = -1/2$. Si vede poi che f è decrescente per $x < -1/2$, e crescente tra $-1/2$ e 0: il punto $-1/2$ è quindi di minimo (assoluto).

(ii) Il limite a $-\infty$ è 0, a $+\infty$ è $+\infty$.

(iii) Si ha, per $x < 0$, $f''(x) = x(16x^2 - 12)e^{-2x^2}$. C'è quindi un punto di flesso in $x = -\sqrt{3}/2$: a sinistra di tale punto la funzione è concava, poi diventa convessa. A questo punto, il grafico è facile da disegnare!

1.2 La successione $\pi(1 - \frac{1}{2n})$ vale $\pi/2$ per $n = 1$, è crescente e tende a π. Poichè la funzione seno è decrescente tra $\pi/2$ e π, si deduce che l'estremo superiore è un massimo e vale 1 (assunto per $n = 1$), mentre l'estremo inferiore è 0 e non è un minimo.

30 giugno 2003

Prova Scritta di Analisi Matematica - U.D.1 (I parte)

1. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \log\log\frac{1}{x}$$

- vale 0;
- vale $+\infty$;
- non esiste;
- vale $-\infty$;

2. Il dominio della funzione $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

- è tutto $\mathbf{R}$;
- è l'unione degli intervalli del tipo $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, con $k \in \mathbf{Z}$;
- è l'unione degli intervalli del tipo $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, con $k \in \mathbf{Z}$;
- è l'intersezione degli intervalli del tipo $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, con $k \in \mathbf{Z}$;

3. Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile con $f'(x) < 0$ per ogni x, si ha sicuramente che

- esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \inf\{f(x) : \ x \in \mathbf{R}\}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

4. Una funzione continua $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$

- ammette sup e inf, entrambi infiniti;
- ammette sup e inf, che possono essere infiniti;
- ammette sup e inf, entrambi finiti;
- potrebbe non ammettere sup e inf;

5. Per quali valori di x si ha $\arccos x \geq 0$?

- per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- per $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$;
- per $-1 \leq x \leq 1$;
- per $0 \leq x \leq 1$;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata
ESAME DI ANALISI MATEMATICA-U.D.1, 30/6/2003
II PARTE: ESERCIZI
(A.A. 2002-2003)

1.1 Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del seguente insieme, specificando se si tratta di massimo e minimo:

$$A = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbf{N}, \ n > 0, m < n\}.$$

1.2 Studiare dettagliatamente la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = |1 - \log(1 + x^2)|.$$

SOLUZIONI:

1.1 L'insieme A contiene tutte le frazioni proprie con numeratore e denominatore non negativi. Dunque, esso è certamente contenuto nell'intervallo $[0, 1]$. Il minimo dell'insieme è 0 (basta prendere $m = 0$, $n = 1$). L'estremo superiore è invece 1: questo è evidentemente un maggiorante per quanto osservato sopra, e non appartiene all'insieme perché $m < n$. Per verificare che è il minimo, basta prendere $m = n - 1$, e osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1,$$

per cui esistono elementi di A arbitrariamente vicini a 1.

1.1 Conviene studiare preliminarmente la funzione $g(x) = 1 - \log(1 + x^2)$: si tratta di una funzione pari, positiva per $x \in (-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1})$. Essa ammette massimo per $x = 0$ (di valore 1), mentre ha due flessi in $x = \pm 1$. Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$.

Con queste informazioni, è facile disegnare il grafico di g: il grafico di f si ottiene allora riflettendo lungo l'asse x la parte di grafico corrispondente a $x > \sqrt{e-1}$ (e $x < -\sqrt{e-1}$). Evidentemente, in $x = \pm\sqrt{e-1}$ avremo due punti angolosi.