DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Università degli Studi di Trento
Via Sommarive - Povo (TRENTO)

Raccolta degli Scritti d'Esame di
ANALISI MATEMATICA U.D. 2
assegnati nei Corsi di Laurea di Fisica, Fisica Applicata, Matematica

(Anno Accademico 2002-2003)

14 marzo 2003

I Prova di Analisi Matematica - Unità Didattica 2 (I parte)

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione ovunque derivabile 3 volte, con $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) = \pi$. Allora

- x_0 non è né di massimo né di minimo relativo;
- x_0 è di minimo relativo;
- x_0 è di massimo relativo;
- non possiamo dire se x_0 è di massimo o di minimo relativo;

2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione ovunque derivabile 3 volte, con $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$. Allora il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x}$$

- vale ∞;
- vale 1;
- vale 0;
- non esiste;

3. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(34)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

vale

- e^{34};
- $\cos 34$;
- $+\infty$;
- $\sin 34$;

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata. Allora

- f è integrabile secondo Riemann;
- se f è continua, è integrabile secondo Riemann;

- f non è integrabile secondo Riemann;
- se f è integrabile secondo Riemann, allora f è continua;

5. Quanto vale l'integrale

$$\int_0^3 (x - [x])\, dx$$

(dove, al solito, $[x]$ denota la parte intera di x, ossia il più grande intero minore o uguale a x)?

- vale 3/2;
- non esiste perché la funzione non è continua;
- vale 1;
- esiste ma non si può calcolare;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

I PROVA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.2, 14/3/2003

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.1 Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 4 (centrato nell'origine) della funzione

$$f(x) = x^2 + e^{x^2} - x\sin(2x).$$

1.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x + x^2 - \log^2(1+x) - 6\sin x}{x^3 + x^5}$$

1.3 Si consideri la funzione $f(x) = e^{-1/x^2}$, definita per $x \neq 0$.

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{10000}}.$$

SOLUZIONI:

1.1 Ricordando i polinomi di Taylor di e^x e di $\sin x$, otteniamo subito

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ x\sin(2x) &= x(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4)) = 2x^2 - \frac{8}{6}x^4 + o(x^5), \end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = x^2 + e^{x^2} - x\sin(2x) = x^2 + 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{6}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{11}{6}x^4 + o(x^4).$$

1.2 Ricordando i polinomi di Taylor di $\log(1+x)$ e di $\sin x$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \log^2(1+x) &= (x - x^2/2 + o(x^2))^2 = x^2 - x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \end{aligned}$$

e sostituendo nel rapporto di cui vogliamo calcolare il limite otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x + x^2 - \log^2(1+x) - 6\sin x}{x^3 + x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = 2.$$

1.3 Si può ridurre facilmente il limite ad un limite fondamentale, *oppure* ci si può ricondurre a quanto visto in classe: se si estende f ponendola uguale a 0 nell'origine, abbiamo visto che si ottiene una funzione derivabile infinite volte, con tutte le derivate uguali a 0 in 0. Dunque, il polinomio di Taylor di grado 10000 per f è $P_{10000}(x) = 0$, e il teorema di Taylor (con resto di Peano) ci dice che il limite cercato è 0.

14 aprile 2003

Prova Scritta di Analisi Matematica - U.D.2 (I parte)

1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge;

2. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza 0. Quanto vale $f'''(0)$?

- $3!a_3$;
- $2!a_2$;
- non esiste;
- a_3;

3. Sotto quale delle seguenti ipotesi possiamo dire che una funzione $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ammette certamente una primitiva in $[a,b]$?

- se f è continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale;
- se f è monotona, perché le funzioni monotone sono integrabili;
- se f è a scala;
- se f è integrabile secondo Riemann;

4. Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua e positiva tale che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Allora

- f non può avere estremo superiore finito;
- f non può avere estremo inferiore finito;
- può essere che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

- deve essere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

5. Se $\{a_n\}$ è una successione positiva con $1/2 < \lim_{n\to+\infty} a_n < 1$, allora

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge per il criterio del rapporto;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ può convergere, ma non è detto;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ certamente non converge;
- non può esistere il limite delle somme parziali di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.1, 6/2/2003

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.1 Si calcolino due a scelta dei seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sin(2\log x)\, dx, \qquad \int \frac{x^4+x^3-5x^2+x-5}{x^2+x-6}\, dx, \qquad \int \frac{\arctan(6\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

1.2 Si discuta per quali valori di x convergono due a scelta tra le seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{2^n}x^n.$$

RECUPERO 1.1 Si trovi lo sviluppo di Taylor di ordine 3 (centrato in 0) della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}.$$

RECUPERO 1.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)-x}{1-\cos x}.$$

30 giugno 2003

Prova Scritta di Analisi Matematica - U.D.2 (I parte)

1. Se $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$, allora

- $\{x : f(x) < 2\} = \emptyset$;
- $\{x : f(x) > 2\} = \emptyset$;
- $\min f \leq 2 \leq \max f$;
- $f(x) \geq 0$;

2. Se definiamo $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$, allora

- $f'(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$;
- $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$;
- $f'(x) = 2\frac{\sin x^2}{x}$;
- $f'(x) = \frac{\sin x^2}{x^2} - \sin 1$;

3. Sappiamo che $a_n \geq 0$, e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente. Cosa possiamo dire della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?

- La serie converge perché $a_n^2 \leq a_n$ per n abbastanza grande;
- La serie diverge perché $a_n^2 \geq a_n$ per n abbastanza grande;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n^2} = 1$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n^2} < 1$;

4. Di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sappiamo che hanno lo stesso polinomio di Taylor di ordine 10 centrato in 0. Allora

- $f(x) = g(x)$;
- f e g hanno derivate coincidenti fino all'ordine 10 in un intorno di 0;
- f e g hanno derivate coincidenti fino all'ordine 10 in 0;
- f e g sono sviluppabili in serie di Taylor;

5. Sia a_n una successione che tende a 0, e supponiamo per semplicità che esista il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

- può avere raggio di convergenza 0;
- ha raggio di convergenza $+\infty$;
- ha come minimo raggio di convergenza 1;
- non converge per alcun $x \in \mathbf{R}$;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

ESAME DI ANALISI MATEMATICA-U.D.2, 30/6/2003

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.3 Calcolare l'integrale
$$\int_1^e (x^2 - \log x)\, dx.$$

1.4 Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{x\to 1} \frac{1 + \log x - e^{x-1}}{(x-1)^2}.$$

1.5 Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^n} x^n.$$

SOLUZIONI:

1.3 Una primitiva dell'integranda è $x^3/3 - x\log x + x$, da cui si ricava che l'integrale richiesto vale $(e^3-4)/3$.

1.4 Se poniamo $y = x - 1$, il limite diventa:
$$\lim_{y\to 0} \frac{1 + \log(1+y) - e^y}{y^2}.$$
Con facili conti si vede che la funzione a numeratore è $-y^2 + o(y^2)$, per cui il limite cercato vale -1.

1.5 La serie ha raggio di convergenza 0, come si verifica subito usando il criterio del rapporto. Dunque, essa converge soltanto per $x = 0$.