DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Università degli Studi di Trento
Via Sommarive - Povo (TRENTO)

Raccolta degli Scritti d'Esame di
ANALISI MATEMATICA U.D. 3
assegnati nei Corsi di Laurea di Fisica, Fisica Applicata, Matematica

(Anno Accademico 2002-2003)

23 maggio 2003

I Prova di Analisi Matematica - Unità Didattica 3 (I parte)

1. Tra le seguenti equazioni differenziali, qual è l'unica con la proprietà che tutte le sue soluzioni sono crescenti?

- $y' = y^2 + 1$;
- $y' = y$;
- $y' = -y$;
- $y' = y^2 - 1$;

2. Le funzioni $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = x + 1$ *non possono* essere entrambe soluzioni di una stessa equazione differenziale $y'(x) = f(x, y(x))$, dove f è una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy. Perché?

- perché l'equazione è lineare del primo ordine;
- perchè l'equazione non è lineare del primo ordine;
- perché $y_1(0) = y_2(0)$, e il problema di Cauchy con questo dato iniziale ha soluzione unica;
- perchè le soluzioni possono essere soltanto esponenziali o funzioni trigonometriche;

3. Il problema

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \sin x \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

- non ha alcuna soluzione;
- ha una ed una sola soluzione;
- potrebbe avere soluzione, ma non è detto;
- ha infinite soluzioni;

4. Quale delle seguenti funzioni non è soluzione di alcuna equazione differenziale lineare omogenea del II ordine a coefficienti costanti?

- $y(x) = 5\cos x + \sin x$;
- $y(x) = \arctan x$;

- $y(x) = e^x + xe^x$;
- $y(x) = e^{3x} \cos(9x)$;

5. Il piano tangente, nell'origine, al grafico della funzione $f(x, y) = x \cos y$ ha equazione

- $z = x$;
- $z = y$;
- $z = x \cos y$;
- nessuno dei precedenti;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

I PROVA DI ANALISI MATEMATICA-U.D.3, 23/5/2003

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.1 Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (1+\tan^2 x)y(x) = x^6 e^{-\tan x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1.2 Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = xe^x.$$

Si trovino poi tutte le (eventuali) soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONI:

1.1 Al solito, il trucco è quello di moltiplicare ambo i membri per un *fattore integrante* che non è altro che l'espoenziale di una primitiva del coefficiente di $y(x)$. In questo caso, moltiplichiamo ambo i membri per $e^{\tan x}$.

Integrando ambo i membri, troviamo facilmente la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y(x) = \frac{1}{7}x^7 e^{-\tan x} + Ce^{-\tan x},$$

e imponendo che valga la condizione iniziale $y(0) = 0$ si trova $C = 0$, per cui

$$y(x) = \frac{1}{7}x^7 e^{-\tan x}.$$

1.2 La soluzione dell'equazione omogenea associata è $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa della forma $y(x) = (ax + b)e^x$. Sostituendo nell'equazione troviamo che deve essere

$a = 1/4$ e $b = -1/4$, per cui la soluzione generale dell'equazione lineare è

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^{x}.$$

Per risolvere il problema con le due condizioni al contorno, riprendiamo la soluzione dell'omogenea trovata sopra. La condizione $y(0) = 0$ implica $A = 0$, mentre la seconda condizione è automaticamente verificata. Dunque, le (infinite) soluzioni del problema sono $y(x) = Bxe^{-x}$, con B costante arbitraria.

30 giugno 2003

Prova Scritta di Analisi Matematica - U.D.3 (I parte)

1. Sia $f(x, y)$ derivabile due volte con derivate continue. Se (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per f, allora certamente

- $\det Hf(x_0, y_0) < 0$;
- $\det Hf(x_0, y_0) > 0$;
- non può essere $\det Hf(x_0, y_0) < 0$;
- $f_x(x_0, y_0) < 0$, $f_y(x_0, y_0) < 0$ e $\det Hf(x_0, y_0) \geq 0$;

2. Sia $f(x, y)$ una funzione derivabile con derivate continue, $Z = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Se $(x_0, y_0) \in Z$ e $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, allora

- Z non è di sicuro una curva regolare in un intorno di (x_0, y_0);
- non è detto che Z sia una curva regolare in un intorno di (x_0, y_0);
- $f(x, y) \geq 0$ per ogni (x, y);
- f non è differenziabile in (x_0, y_0);

3. Quale delle seguenti implicazioni vale sempre per una funzione di due variabili?

- se esistono $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, allora f è differenziabile in (x_0, y_0);
- se esistono $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, allora f è continua in (x_0, y_0);
- se esistono $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ e f è continua in (x_0, y_0), allora f è differenziabile in (x_0, y_0);
- se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora f è continua in (x_0, y_0);

4. Sia $f(x, y)$ una funzione continua di due variabili tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette due soluzioni distinte. Allora di sicuro

- f non può essere positiva;
- non si può avere $f_x(x_0, y_0) = 0$;

- f è derivabile due volte con derivate continue;
- f non può essere derivabile rispetto a y con derivata continua;

5. La serie di Fourier della funzione $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

- è $S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$;
- è $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$;
- non esiste;
- è $S(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Fisica Applicata

ESAME DI ANALISI MATEMATICA-U.D.3, 30/6/2003

II PARTE: ESERCIZI

(A.A. 2002-2003)

1.1 Data la funzione di due variabili $f(x,y) = x^2 + 3xy$, si spieghi per quale motivo essa è differenziabile in tutti i punti del piano $\mathbf{R}^2$. Si trovino poi tutti gli eventuali punti di massimo relativo, di minimo relativo e di sella di f.

1.2 Si trovino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \; 4x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si spieghi perché possiamo essere sicuri che il massimo e il minimo ci sono...

RECUPERO 1.1 Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = e^x(6 - x - x^2).$$

RECUPERO 1.2 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = \sin(3x) \\ y(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONI:

1.1 La funzione è ovunque differenziabile grazie al teorema del differenziale totale: le sue derivate parziali esistono ovunque, e sono continue in quanto polinomi di primo grado. Si trova facilmente che l'unico punto critico è l'origine. Inoltre, il determinante della matrice hessiana nell'origine vale -9: l'origine è pertanto un punto di sella.

1.2 L'unico punto critico della funzione è l'origine $(0,0)$, e tale punto è un possibile punto di massimo o minimo perché giace all'interno dell'insieme A. Inoltre, $f(0,0) = 0$.

Per trovare eventuali punti critici sulla frontiera di A, caratterizzata dall'equazione $4x^2 + y^2 = 1$, possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (perché il gradiente della funzione $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 1$ non si annulla mai sul vincolo). Si trova il sistema

$$\begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che ci permette di individuare i punti critici vincolati $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1/2, 0)$. Confrontando il valore di f in questi quattro punti e nell'origine si trova che la funzione è minima in $(0, 0)$ (e il valore minimo è 0), mentre è massima in $(0, \pm 1)$ (e il valore massimo è 3).

RECUPERO 1.1 La soluzione dell'omogenea è $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$. Possiamo quindi trovare una soluzione particolare del tipo $y_P(x) = e^x(ax^2+bx+c)$. Sostituendo si trovano facilmente a, b, c.

La soluzione generale è

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + e^x(\frac{1}{2}x^2 + x - 2).$$

RECUPERO 1.2 L'equazione è lineare del primo ordine, e si risolve facilmente moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante x. Imponendo che valga la condizione iniziale si trova la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{9x}.$$