Esercizi di logica matematica 06 – 07

Settimana 1

1. Definire ricorsivamente la funzione *bin* che conta il numero di occorrenze dei connettivi binari in una qualunque formula α.

2. Dimostrare il Teorema 1.1.6 in van Dalen, *Logic and Structure, 4a ed.*

   Suggerimento: Sia F il più piccolo insieme Y che soddisfa le proprietà seguenti:

   (a) $(\varphi, H_{at}(\varphi)) \in Y$ per ogni formula atomica φ;

   (b) $(\varphi, a) \in Y \Rightarrow (\neg\varphi, H_{\neg}(a)) \in Y$ per ogni $\varphi \in PROP$;

   (c) $(\varphi, a) \in Y$ e $(\psi, b) \in Y \Rightarrow (\varphi \square \psi, H_{\square}(a, b)) \in Y$ per ogni $\varphi, \psi \in PROP$ e $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

   Provare che un tale F esiste ed è (il grafico di) una funzione da $PROP$ in A.

3. Esercizio 6 in van Dalen, *Logic and Structure, 4a ed.*

4. Provare che l'insieme $\mathcal{V}$ delle valutazioni di verità ha la cardinalità dell'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali. (Non è necessario conoscere una definizione rigorosa di cardinalità: basta provare che $\mathcal{V}$ e $\mathbf{R}$ sono in biiezione.)

5. Un *connettivo* è univocamente determinato dalla sua *tavola di verità*. Quindi i connettivi n–ari sono (in corrispondenza biunivoca con) le funzioni che hanno per dominio $\{0, 1\}^n$ e codominio $\{0, 1\}$.

   (a) Per ogni $n > 0$, contare il numero dei connettivi n-ari.

   (b) Dire esplicitamente quali sono i connettivi 1-ari.

   (c) Esistono anche connettivi 0-ari (non li tratteremo!). Cosa sono i connettivi 0-ari?