Esercizi di logica matematica 06–07

Settimana 3

1. Dare un esempio di un insieme $\Phi \subseteq PROP$ e di una formula $\alpha \in PROP$ tale che $\Phi \nvdash \alpha$ and $\Phi \nvdash \neg\alpha$. (*Suggerimento*: cercare Φ e α molto semplici.)

   Concludere che, in generale, *non* vale che $\Phi \nvdash \alpha \;\Rightarrow\; \Phi \vdash \neg\alpha$.

2. Provare con un esempio che un'estensione di un insieme consistente ad un massimale consistente non è, in generale, unica.

3. Provare che esiste una biiezione tra la famiglia degli insiemi massimali consistenti di formule proposizionali e quella delle valutazioni di verità.

4. (*Un piccolo esercizio di topologia*)

   Si dice che una famiglia di insiemi ha la *proprietà dell'intersezione finita (fip)* se ogni sua sottofamiglia finita ha intersezione non vuota.

   Provare che la compattezza di uno spazio topologico (X, τ) è equivalente alla seguente: ogni famiglia di chiusi nella topologia τ con la proprietà *fip* ha intersezione non vuota.

   Suggerimento: i chiusi sono i complementari degli aperti. Richiedere che $(A_i)_{i\in I}$ sia un ricoprimento aperto è equivalente a richiedere che $\bigcap_{i\in I} A_i^C = \emptyset$ (per De Morgan).

5. (*Interpretazione topologica del teorema di compattezza per la logica proposizionale*)

   Sia $\mathcal{V}$ l'insieme delle valutazioni di verità su $PROP$. Sia $\Phi \subseteq PROP$. Definiamo
   $$[\Phi] = \{v \in \mathcal{V} : v(\Phi) = 1\}.$$
   (Se $\Phi = \{\varphi\}$, scriveremo $[\varphi]$ per $[\Phi]$.) Provare che:

   (a) L'insieme
   $$\mathcal{B} = \{[\varphi] : \varphi \in PROP\}$$
   è base per una topologia di Hausdorff τ su $\mathcal{V}$.

   Suggerimento: Affinchè $\mathcal{B}$ sia una base è sufficiente provare che: 1. $\bigcup \mathcal{B} = \mathcal{V}$ e 2. per ogni φ, ψ ed ogni $v \in [\varphi] \cap [\psi]$ esiste η tale che $v \in [\eta] \subseteq [\varphi] \cap [\psi]$.

   (b) Gli insiemi $[\varphi]$ sono chiusaperti in tale topologia.

   (c) Gli insiemi $[\Phi]$ sono i chiusi in tale topologia.

   (d) Lo spazio $(\mathcal{V}, \tau)$ è totalmente sconnesso.

(e) Il teorema di compattezza per la logica proposizionale è *equivalente* alla compattezza topologica di $(\mathcal{V}, \tau)$.

Suggerimento: dato che, dal punto (c) si conoscono i chiusi di τ, può essere conveniente usare la formulazione della compattezza data nell'Esercizio precedente.

6. Siano Φ un insieme di formule ed α una formula della logica proposizionale. Provare che $\Phi \models \alpha$ se e soltanto se esiste un sottoinsieme finito Φ_0 di Φ tale che $\Phi_0 \models \alpha$. (Si noti che l'equivalenza è vera se rimpiazziamo $\models$ con $\vdash$.)

   Suggerimento: Usare il Teorema di Compattezza

7. Esercizi 1, 2 pag. 47; 6 pag. 48 in Van Dalen, *Logic and Structure, 4a ed.*.

8. Diciamo che una famiglia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ di formule proposizionali è una *catena* se $\vdash \varphi_{n+1} \to \varphi_n$ e $\not\vdash \varphi_n \to \varphi_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

   Provare che non esiste nessun enunciato φ tale che: 1. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \vdash \varphi$ e 2. $\vdash \varphi \to \varphi_n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

9. Provare che il Teorema di Compattezza per la logica proposizionale è equivalente alla seguente:

   Proposizione: Sia Φ un insieme di formule proposizionali tali che ogni valutazione di verità soddisfa almeno una formula in Φ. Allora esiste un sottoinsieme finito
   $$\Phi_0 = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$$
   di Φ tale che $\varphi_0 \vee \ldots \vee \varphi_n$ è una tautologia.

   Suggerimento: se Φ soddisfa le ipotesi della Proposizione, cosa si può dire dell'insieme $\Psi = \{\neg\varphi : \ \varphi \in \Phi\}$?

10. Provare che se $\Gamma \subseteq PROP$ è massimale consistente, allora le seguenti sono equivalenti per ogni $\alpha, \beta \in PROP$:

    (a) $\alpha \vee \beta \in \Gamma$

    (b) almeno una tra α e β appartiene a Γ.